Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$

I Généralités

Df : Soit un système linéaire de p équations en n inconnues :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i & (L_i) \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p & (L_p) \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}} \in K^{pn}$ et $(b_i)_{1\le i\le p} \in K^p$

Une solution de (S) est un vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tel que les x_i satisfont toutes les équations.

Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Si $A \in M_{pn}(K)$ tq $[A]_{ij} = a_{ij}$, $B \in M_{p1}(K)$ tq $(B)_j = b_j$, alors le système s'écrit $AX = B$ où $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$

Df : On considère l'action de $GL_p(K)$ sur $M_{pn}(K)$ définie par $P \in GL_p(K)$, $A \in M_{pn}(K)$, $P.A = PA$ (ie par multiplication à gauche).

Rq : Si A et A' sont dans la même orbite tq $A' = PA$, alors le système $AX = B$ est lié au système $A' = PB$.

Ppté : Soient $(A, A') \in M_{pn}(K)^2$. Alors il est équivalent de dire :
- A et A' sont dans la même orbite
- les colonnes de A et de A' engendrent le même sev.

Df : Le rang d'un système linéaire $AX = B$ correspond au rang de la matrice A.

Df : On appelle matrice échelonnée une matrice si les lignes suivant une ligne nulle sont nulles et si le 1er coefficient non nul de chaque ligne (appelé pivot) est placé strictement à droite des lignes précédentes.

Ex : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Df : Un système linéaire $AX = B$ est dit de Cramer lorsque A est une matrice carrée et inversible.

Prop : Notons $A_1, \dots, A_n$ les n vecteurs colonnes formant $A \in GL_n(K)$. Alors $\forall B \in M_{n1}(K)$ le système $AX = B$ de Cramer admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où

$$x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

Ex : Dans le plan, deux droites non colinéaires ont un unique point d'intersection.

Df : Un système linéaire est homogène s'il est du type $AX = 0$ avec $A \in M_{pn}(K)$, $X \in M_{n1}(K)$

Rq : Un système homogène de Cramer a pour solution ${}^t(0, \dots, 0)$

II La méthode du pivot de Gauss

1) Présentation de l'algorithme

Df : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice (de $M_p(K)$) :

1. de transvection une matrice $T_{ij}(\lambda) = I_p + \lambda E_{ij}$ où $1 \le i \ne j \le p$, $\lambda \ne 0$
2. de dilatation une matrice $D_i(\alpha) = I_p + (\alpha - 1)E_{ii}$ où $\alpha \ne 1$, $i \in [\![1, p]\!]$
3. de permutation une matrice $P_\sigma = (p_{ij})$ où $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ avec $\sigma \in S_p$.

(3)

Prop : Les matrices de dilatations et de transvections engendrent $GL_p(K)$.

Rq : En particulier, ces matrices sont toutes inversibles.

Ppté : Les transvections engendrent $SL_n(K)$

gauche

Ppté : Multiplier à gauche le système linéaire par l'une de ces matrices laisse invariant l'ensemble des solutions et revient à réaliser les opérations suivantes sur le système :

$D_i(\alpha) \leftrightarrow L_i = \alpha L_i$ $\qquad P_{ij} \leftrightarrow \begin{matrix} L_i = L_j \\ L_j = L_i \end{matrix}$

$T_{ij}(\lambda) \leftrightarrow L_i = L_i + \lambda L_j$

Rq : L'invariance découle de l'action.

Df : On appelle opérations élémentaires (sur les lignes) ces opérations sur le système.

Prop : On appelle algorithme du pivot de Gauss la transformation de toute matrice $A \in M_{pn}(K)$ en matrice échelonnée grâce aux opérations élémentaires sur les lignes.

~~On obtient aussi l'ensemble des solutions de tout système linéaire $AX = S$, $\forall B \in M_{p1}(K)$~~

Rq : ~~lorsque~~ A est ~~inversible~~ carrée, ~~il permet également~~ de calculer l'inverse de A.

Prop : 1) Deux matrices de $M_{pn}(K)$ sont dans la même orbite pour l'action de $GL_p(K)$ ssi elles ont même noyau.

2) Toute matrice est dans l'orbite d'une matrice échelonnée, unique si les pivots sont pris égaux à 1. (*)

2) Autres résultats liés au pivot de Gauss

Df/Prop : On appelle opérations élémentaires sur les colonnes toute multiplication ~~par~~ à droite par une matrice de transvection, de dilatation et de permutation.

Prop : Soit $A \in M_{pn}(K)$ de rang r.
On peut transformer A en $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.

Rq : Si $A \in GL_n(K)$, la méthode permet de calculer l'inverse de A.

~~Ex~~ Systèmes homogènes.

Prop : Les solutions d'un système homogène forment un sev de K^n.
Si le système échelonné comporte k équations, alors cet sev est de dimension $n-k$.

Rq : Ainsi, si $p<n$, il y a forcément une solution non nulle.

Ex : Deux hyperplans se rencontrent nécessairement ailleurs qu'en 0.

Prop : Soit $SL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices à coefficients entiers, inversibles d'inverse à coefficients entiers et de déterminant 1.
Alors les transvections avec $\lambda \in \mathbb{Z}$ engendrent $SL_n(\mathbb{Z})$.

DEV 1 — Décomposition de Bruhat.

Soit $G = GL_n(K)$ où K est un corps.
Soit H le sous-groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures.
Alors $G = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} H P_\sigma H$ ie $\forall A \in G$, $\exists! \sigma \in S_n$ et $\exists (T,S) \in H^2$ tq $A = T P_\sigma S$. [1]

Df : Un drapeau de K^n est une suite croissante (F_k) telle que F_k sev de K^n de dimension k. $\mathcal{D}$ désigne l'ens des drapeaux.

Prop : Soit l'action $\begin{pmatrix} G, \mathcal{D} \to \mathcal{D} \\ A, (F_k) \mapsto (AF_k) \end{pmatrix}$
L'action est bien définie et est transitive.
De plus, $G/H \simeq \mathcal{D}$.

DEV 1 Soit l'action $\begin{pmatrix} G, (G/H, G/H) \to (G/H, G/H) \\ A, (\bar{X}, \bar{Y}) \mapsto (\overline{AX}, \overline{AY}) \end{pmatrix}$ [2]

Alors l'action est bien définie et possède $n!$ orbites.

III Résolution effective

→ Pour un système de Cramer $n \times n$.
On a une solution explicite qui nécessite le calcul de $n+1$ déterminants.
De plus, chaque déterminant nécessite $n!$ monômes, eux-mêmes le facteur de n termes.
On obtient un coût en $O(n(n+1)!)$ qui est rédhibitoire pour appliquer cette méthode

→ Pour la méthode de Gauss
Il faut d'abord trouver un pivot pour la 1ère ligne ce qui coûte n opérations.
Pour échelonner par rapport à la 1ère ligne, il faut 1 division, n multiplications et n additions, cela étant répété pour $(n-1)$ équations.
On obtient un coût en $O(n^3)$ qui est déjà plus satisfaisant.

Rem 2 : Méthode de Gauss-Seidel

Références : CALDERO - GERMONI
GRIFONE