Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{F}_q$ où $2 \nmid q$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

I Formes quadratiques

1) Définitions et premières propriétés

Déf : Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique sur E si, étant donné une base $B = (e_i)_{i \in [1,n]}$ de E, $\forall x \in E$ où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les x_i.

Rq : Le choix de la base n'importe pas.

Prop : • Soit $s : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Alors l'application $q \begin{pmatrix} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto s(x,x) \end{pmatrix}$ est une forme quadratique sur E.

• Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique sur E. Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique $s : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que $s(x,x) = q(x)$, $\forall x \in E$.
s est donné pour $(x,y) \in E^2$, $s(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ et on l'appelle la forme polaire de q.

Rq : Il y a donc une bijection entre formes quadratiques sur E et formes bilinéaires symétriques sur E.

Ex : 1) La forme quadratique associée à un produit scalaire $\langle \cdot \rangle$ est $q(x) = \langle x | x \rangle = \|x\|^2$, $x \in E$.
2) $q \begin{pmatrix} M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \mapsto Tr({}^tAA) \end{pmatrix}$ est une forme quadratique.

2) Rang et représentation matricielle

Soient q une forme quadratique sur E de forme polaire s et soit B une base de E où $B = (e_i)$

Déf : La matrice de q dans B est définie comme la matrice de la forme polaire s dans B ie la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ de coefficient (i,j) égal à $s(e_i, e_j)$
Le rang de q est défini comme le rang de la matrice de la forme polaire s dans une base quelconque de E

Déf : Le noyau de la forme quadratique q $\ker(q)$ est défini comme le noyau de la forme polaire s ie $\ker(q) = \{ y \in E \mid s(x,y) = 0 \ \forall x \in E \}$ (cf. Lemme?)

Rq !! : $N(q) \neq \{ y \in E \mid q(y) = s(y,y) = 0 \}$

Prop : Soit q une forme quadratique sur E (de dim finie) alors $\dim(E) = rg(q) + \dim(\ker(q))$

Déf : La forme quadratique q est non dégénérée si q est de rang maximal ie $\ker(q) = \{0\}$
La forme quadratique q est définie (resp. déf positive) si s est défini (resp. déf. positive).

Prop : q déf $\geq 0 \Rightarrow q$ non dégénérée

II Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité

Déf : Une base $B = (e_i)_{i \in [1,n]}$ de E est orthogonale pour une forme bilinéaire s de E si $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $i \neq j$, $s(e_i, e_j) = 0$.
De plus, si $s(e_i, e_i) = 1$, (e_i) est dite orthonormée.

Rq : Dans une telle base, la matrice de s est diagonale (orthogonale) et I_n (B orthonormée)

Déf : Une base orthogonale pour q est une base orthogonale pour sa forme polaire s.

Th : Soit q une forme quadratique sur E.
Il existe des bases orthogonales pour q.
ie $\exists B=(e_i)$ telle que $\forall x=\sum x_i e_i \in E$, alors
$q(x)=a_1x_1^2+\dots+a_r x_r^2$ où $a_i\in K$ et $r=rg(q)$.

Rq : La recherche d'une base orthogonale se fait par la méthode de Gauss.

Df : Soit $A\subset E$ et s une forme bilinéaire symétrique.
L'orthogonal de A est le sev $\{x\in E \mid s(x,a)=0 \ \forall a\in A\}$
et on le note $A^{\perp_s}$ ou $A^{\perp}$.

Ppté : Soit q une forme quadratique de forme polaire s.
Alors $E^{\perp}=N(q)$
et $Ker(q)\subseteq A^{\perp}$ pour tout $A\subset E$

Prop : Soit F un sev de E. Alors :
$\dim(E)=\dim(F)+\dim(F^{\perp})-\dim(F\cap Ker(q))$

Rq : Le cas non dégénéré est plus simple.

2) Isotropie

Df : Soit q une forme quadratique de forme polaire s.
Un sev F de E est isotrope si $F\cap F^{\perp}\neq\{0\}$

Df : Le cône isotrope de q noté $I(q)$ est l'ensemble
$I(q)=\{x\in E \mid q(x)=0\}$

Rq : On n'est pas un sev : que stable par homothétie.

Ppté : $Ker(q)\subset I(q)$
$I(q)\neq\{0\}$ ssi il existe des sev isotropes

Ex : $q\begin{pmatrix}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto x^2-y^2\end{pmatrix}$: q non dégénérée
et le cône isotrope de q est $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|=|y|\}$

Prop : pour tout F sev de E,
$E=F\oplus F^{\perp}$ ssi F est pas isotrope.

Rq : q non dégénérée n'assure pas toujours $F\oplus F^{\perp}=E$
(cf exemple).

III Classifications des formes quadratiques

Une forme quadratique est uniquement associée à une forme bilinéaire et donc à une matrice pour une base donnée.
Deux matrices représentent la même forme quadratique si elles sont congruentes.
On cherchent des orbites de l'action par congruence de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$

1) Le cas $K=\mathbb{C}$

Prop : Soit q une forme quadratique sur E de rang r
Alors il existe une base orthogonale B $(e_i)_{i\in[1,n]}$ pour
la forme polaire s telle que $q=\sum_{i=1}^{r}(e_i^*)^2$ ie $\forall x=\sum x_i e_i$
$q(x)=x_1^2+\dots+x_r^2$ ie $Mat_B(q)=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$

Rq : Il y a donc $n+1$ orbites pour l'action de congruence.

Coro : Il existe une base orthonormée pour q ssi q est non dégénérée.

2) Le cas $K=\mathbb{R}$

Prop : Soit q une forme quadratique sur E de rang r
Alors il existe une base orthogonale $B=(e_i)$ pour q
et $\exists p\in[0,r]$ telle que pour $x\in E$, $x=\sum x_i e_i$,
$q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$
ie $Mat_B(q)=\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0\end{pmatrix}$

Le couple $(p,r-p)$ ne dépend pas de la base et dépend uniquement de la forme quadratique.

Df : On appelle ce couple signature de q.

Rq : Il y a un nombre fini d'orbites égal à $\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$
et la signature (p,q) caractérise chaque orbite.

On peut se restreindre aux formes quadratiques non dégénérées : il y a alors $n+1$ orbites.

Prop : Les composantes connexes de $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ sont les ensembles $U_k = \{M \in S_n(\mathbb{R}) \mid \text{sign}(M) = (k, n-k)\}$.
Il y a donc $n+1$ composantes connexes.

Prop : Il existe des bases orthonormées pour q ssi q est non dégénérée et définie positive.

3) Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$

Prop : Soit q une forme quadratique sur E de rang r et soit $\delta \in \mathbb{F}_q$ tel que δ ne soit pas un carré dans $\mathbb{F}_q$.
Alors il existe une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1,n]}$ pour q telle que pour $x = \sum x_i e_i$:

- soit $q(x) = x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + x_r^2$ $\quad \text{mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$
- soit $q(x) = x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \delta x_r^2$ $\quad \text{mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_{r-1} & & \\ & \delta & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Rq : Il y a donc $2n+1$ orbites pour l'action par congruence.

Lemme : Soient $(a,b) \in (\mathbb{F}_q \setminus \{0\})^2$.
L'équation $ax^2 + by^2 = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{F}_q^2$.

Coro : Soit q une forme quadratique sur E non dégénérée.
Alors q admet une base orthonormée ssi $\forall \mathcal{B}$ base de E $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q))$ est un carré de $\mathbb{F}_q$.

DEV 1 formes quadra sur $\mathbb{F}_q$

IV Applications

1) Formes quadratiques sur un espace euclidien

Th (réduction pseudo-semblance) : Soit $(E, \langle\,,\rangle)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E.
Alors il existe des bases qui sont à la fois orthonormées pour $\langle\,,\rangle$ et orthogonales pour q.

Appli : La classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ est l'étude de l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ ainsi que $O_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$.

2) Coniques ou calcul diff

1) Un exemple au tableau ?

2) On veut $F \oplus F^{\perp} = E$
comme dans ~~le~~ cas euclidien

(*) Une telle décomposition équivaut à écrire
q comme somme de carrés de r formes
linéaires indépendantes.

Références

[GRI] J. GRIFONE
[GOU] GOURDON Algèbre
[C-G] CALDERO - GERMONI
[FGN] Oraux X-ENS Algèbre 3