171

Formes quadratiques réelles
Exemples et applications

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

I Généralités

1) Définitions et premières propriétés

Def : Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique réelle si étant donné une base $(e_i)_{1\le i\le n}$ de E, pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les x_i.

Prop : Il y a une bijection entre formes quadratiques sur E et formes bilinéaires symétriques sur E :
- si q est une forme quadratique, la forme symétrique s associée est unique et vérifie $s(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ $\forall (x,y) \in E^2$ et est appelée forme polaire de q.
- si s est une forme bilinéaire symétrique, $q\begin{pmatrix} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto s(x,x) \end{pmatrix}$ est une forme quadratique réelle.

Def : Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire s et B une base de E, où $B = (e_i)$.
La matrice de q dans B est la matrice de coefficients (a_{ij}) égaux à $s(e_i, e_j)$.
Le rang de q est le rang de $Mat_B(q)$, $\forall B$ base de E.
Le noyau de q est le sev $Ker(q) = \{y \in E \mid s(x,y) = 0 \ \forall x\}$
Le cône isotrope de q est $I(q) = \{y \in E \mid q(y) = 0\}$

Prop : On a l'égalité suivante (car E de dim finie)
$n = rg(q) + \dim(Ker(q))$

Prop : $Ker(q) \subset I(q)$

Def : Une forme quadratique q de forme polaire s est :
- non dégénérée si $rg(q) = n$ ie $Ker(q) = \{0\}$
- définie positive si s est définie positive
- définie si s est définie ie $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Rq : q définie positive $\Rightarrow$ q non dégénérée.

2) Classification des formes quadratiques réelles.

Def : Une base $B = (e_i)_{1\le i\le n}$ de E est orthogonale pour une forme quadratique q de forme polaire s de E si $\forall (i,j)$, $i \neq j$, $s(e_i, e_j) = 0$
Si de plus, $s(e_i, e_i) = 1$ $\forall i$, B est dite orthonormée.

Intérêt : Si B orthogonale pour q, $Mat_B(q)$ diagonale
si B orthonormée, $Mat_B(q) = I_n$.

Th : Soit q une forme quadratique réelle.
Alors il existe des bases orthogonales pour q, ie $\exists B$, base de E, $B = (e_i)$ telle que pour $x = \sum x_i e_i$, $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$ où $r = rg(q)$ et $a_i \in \mathbb{R}$

Rq : Ceci équivaut à l'existence de r formes linéaires indépendantes et écrire q comme CL de leurs carrés.

Rq : La recherche d'une base orthogonale se fait grâce à l'algorithme de Gauss.

Prop - Loi d'inertie de Sylvester : Soit q une forme quadratique réelle de rang r.
Alors il existe une base B de E telle que

$$Mat_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où $p \in [\![0, r]\!]$ ie la base B est orthogonale pour q telle que $\forall x \in E$, $x = \sum x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

Le couple $(p, n-p)$ ne dépend que de la forme q (et pas de la base $\mathcal{B}$)

Df: On appelle signature le couple $(p, n-p)$ ci-dessus.

Cons: Classifier les formes quadratiques réelles, c'est déterminer les orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ par congruence sur $S_n(\mathbb{R})$.

Chaque orbite est caractérisée par la signature de ses éléments : il y a donc $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ orbites.

DEV 1 — Composantes connexes de $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$

Soit $\Lambda_k = \{M \in S_n(\mathbb{R}) \mid M$ est de signature $(k, n-k)\}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$. Soit $\|\cdot\|$ une norme de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, Λ_k est ouvert

2) — Λ_k est connexe.

Cc: Il y a $n+1$ composantes connexes pour $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$

II Exemples et applications

1) Formes quadratiques dans un espace euclidien

Th (Réduction pseudo-simultanée) : Soit $(E, <|>)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E.
Alors il existe des bases qui sont à la fois orthonormales pour $<|>$ et orthogonales pour q.

Appli : En fait, la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ revient à déterminer les orbites de l'action de $G_n(\mathbb{R})$ [illegible] que $O_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$.

2) Classification des coniques

Ici, $E = \mathbb{R}^2$ muni d'un produit scalaire $<|>$

Df : Soit q une forme quadratique non nulle et φ une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$, soit $k \in \mathbb{R}$.
On appelle conique l'ensemble $\mathcal{C}$ des $v \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation $q(v) + \varphi(v) = k$

Rq : Si (e_1, e_2) base canonique de $(\mathbb{R}^2, <|>)$, l'équation de $\mathcal{C}$ est du type $\alpha X^2 + 2\beta XY + \gamma Y^2 + \lambda X + \omega Y = k$ pour $v = Xe_1 + Ye_2$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \omega$ dans $\mathbb{R}$.

Th : Supposons que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ et n'est pas réduit à un point. Alors

- si $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$, alors $\mathcal{C}$ est une ellipse
- si $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$, alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole qui dégénère éventuellement en deux droites non parallèles
- si $\mathrm{sign}(q) = (1,0)$, alors $\mathcal{C}$ est une parabole qui dégénère éventuellement en une droite ou en 2 droites parallèles

Cf annexe pour les dessins.

3) Matrice hessienne et géo diff

Extremums locaux

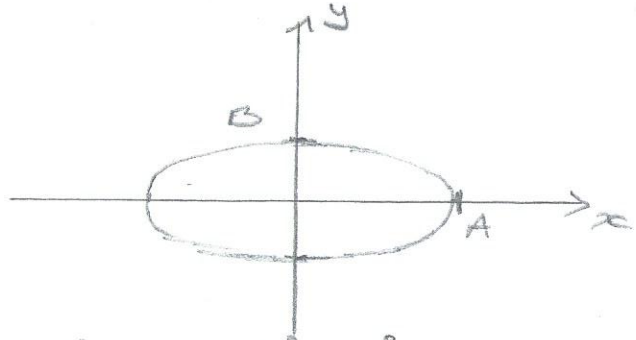
+ lemme de Morse

<u>Références</u> : GRIFONE

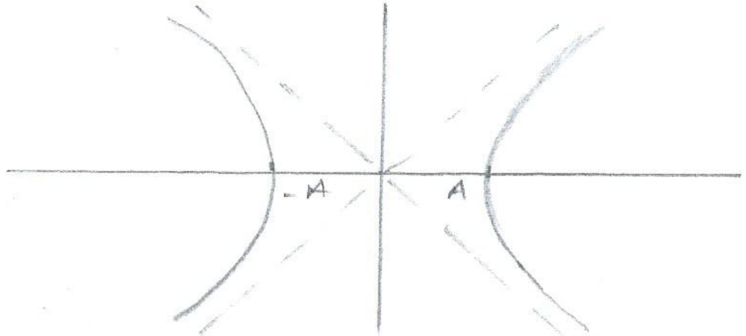
GOURDON

MONIER Analyse MP

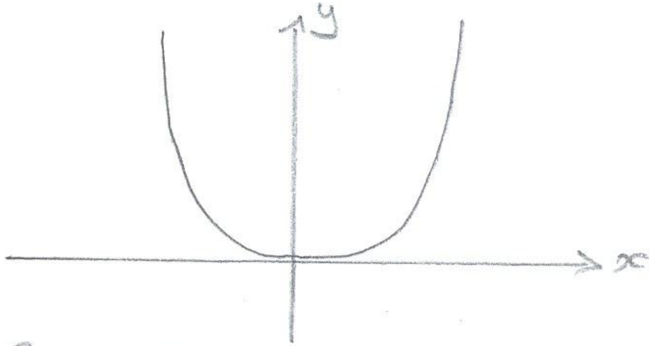
Algèbre MPSI



Ellipse : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$



Hyperbole : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$



Parabole : $y = ax^2$
$a > 0$