Barycentre dans un espace affine réel de dimension fini, convexité. Applications

I Barycentres

1) Définition

Df : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie sur l'ev E sur $\mathbb{R}$. Un point pondéré est un couple $(A, \lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$

Df : Soient les points pondérés $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k)$ et O l'origine de $\mathcal{E}$. On définit la fonction vectorielle de Leibniz $\varphi \left(\begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow E \\ M \longmapsto \sum_{p=1}^{k} \lambda_p \overrightarrow{MA_p} \end{array} \right)$

Ppté : φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ dans E si et ssi $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \lambda \neq 0$

Df : L'unique point G tel que $\varphi(G) = \vec{0}$ est appelé barycentre de cette famille de points pondérés. On le note $\mathrm{Bar}((A_i, \lambda_i))_{i \in [1,k]}$

Ppté : La relation de Chasles permet de caractériser le barycentre G par la relation $\boxed{\left(\sum_{p=1}^{k} \lambda_p\right) \overrightarrow{OG} = \sum_{p=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_p}}$ via la définition $\boxed{\sum_{l=1}^{k} \lambda_l \overrightarrow{GA_l} = \vec{0}}$

Rq : Si $\sum_{l=1}^{k} \lambda_l = 0$, alors φ est constante et $\varphi(M) = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \overrightarrow{A_l O}$

Df : Lorsque les coefficients λ_i sont tous égaux non nuls, on parle d'isobarycentre des points $A_1, \dots, A_m$

Ex : L'isobarycentre de deux points est le milieu du segment !

2) Propriétés

Prop : Associativité du barycentre : Soient les scalaires $\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,k_1}, \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,k_2}, \dots, \lambda_{r,1}, \dots, \lambda_{r,k_r}$ tels que les sommes $\sum_j \lambda_{i,j}$ soient non nul pour tout i et $\sum_{i,j} \lambda_{ij} \neq 0$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A_{ij}, \lambda_{ij})_{ij}$ et B_i le barycentre du système de points pondérés $(A_{ij}, \lambda_{ij})_{j \in [1,k_i]}$ $\forall i \in [1,r]$

Alors le barycentre du système $(B_i, \sum_j \lambda_{ij})_{i \in [1,r]}$ est G

Rq : En français, le barycentre d'un système est le barycentre des barycentres de sous-systèmes convenables

Ex : L'isobarycentre de trois points ABC est le centre de gravité du triangle ABC et sa construction découle de l'associativité du barycentre. (dessin ?)

Prop - Homogénéité du barycentre : Soit G le barycentre du système de points (A_i, λ_i) où $\sum \lambda_i$ et soit $\mu \in \mathbb{K}^*$. Alors le barycentre de $(A_i, \mu \lambda_i)$ est G.

Ppté cruciale : On peut toujours se ramener via un scalaire au cas $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ pour tout système de points pondérés sans changer le barycentre

Prop : Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ affines sur $\mathbb{K}$. Pour que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ soit affine il faut et il suffit que pour toute famille finie $(A_i, \lambda_i)_k$ de points pondérés de $\mathcal{E}$ tq $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, alors
$f(\mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_i) = \mathrm{Bar}(f(A_i), \lambda_i)_i$

Rq : Caractérisation des applications affines : elles doivent conserver le barycentre.

Prop : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\mathcal{F}$ une partie $\neq \emptyset$ de $\mathcal{E}$. Pour que $\mathcal{F}$ soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que tout barycentre de $\mathcal{F}$ soit élément de $\mathcal{F}$.

Rq : Caractérisation des sous-espaces affines :

Coro : Soit $X \neq \emptyset$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés de X.

On peut interpréter les coord barycentriques que longueur en dim = 2 / aire en dim = 3

3) ~~Coordonnées barycentriques~~

Ex : Le barycentre de (A_i, λ_i) a pour coordonnées $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$

Df : Soit $\{A_0, \dots, A_k\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$ ($\dim \mathcal{E} = k$). Alors il existe des scalaires uniques $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ tels que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ et $M = \mathrm{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in [0,k]})$.
Ces scalaires sont appelés coordonnées barycentriques du point M dans le repère affine $\{A_0, \dots, A_k\}$

Rq : Souvent, les points du repère sont ceux d'un polyèdre non aplati (cf 4)) (dim 1 ou 2)

3) Applications

a) Exemple du triangle.

Soit ABC un triangle non aplati : {A, B, C} est un repère affine (de E le plan), donc tout point du plan peut être repéré via ses coordonnées barycentriques.

Prop : Le centre de gravité G de ABC a pour coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

L'orthocentre H de ABC a pour coordonnées $\left(\frac{\tan(a)}{S}, \frac{\tan(b)}{S}, \frac{\tan(c)}{S}\right)$, $S = \tan(a)+\tan(b)+\tan(c)$

Le centre du cercle circonscrit O de ABC a pour coord $\left(\frac{\sin(2a)}{S'}, \frac{\sin(2b)}{S'}, \frac{\sin(2c)}{S'}\right)$, $S' = \sin(2a)+\sin(2b)+\sin(2c)$

Th de Ménélaüs et Ceva : Soient ABC un triangle non plat et A', B' et C' des points des côtés BC, CA, AB. Alors

– A', B' et C' sont alignés $\iff \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$ (th de Ménélaüs)

– AA', BB' et CC' sont parallèles ou concourantes $\iff \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$ (th de Ceva)

c) Utilisation des coordonnées barycentriques

Lemme : Changer de repère n'affecte pas l'alignement de points de E

Rq : Résulte du fait que $f : E \to E$ bijective $\iff \vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ bijective

Ainsi, on va traduire les critères de familles libres d'un ev (det ≠ 0) pour les espaces affines via $(A_0, \dots, A_n)$ libre $\iff (\overrightarrow{A_0A_i})_i$ libre

Prop : Soit E le plan euclidien et {A, B, C} un repère affine. Soit $P(p, q, r)$, $P'(p', q', r')$ donnés de distincts. Alors le point $M(x, y, z) \in (PP') \iff \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0$

Rq : Permet de retrouver l'équation cartésienne d'une droite : en développant le det, on trouve $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Critère d'alignement

Prop : Soit E le plan euclidien et $D(u, v, w)$ et $D'(u', v', w')$ deux droites de E. Alors

– D et D' ont un unique pt d'intersection $\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} \neq 0$

– D et D' sont parallèles ou confondues $\iff$ — $= 0$

Appli : Th de M. et Ceva

II Convexité

1) Généralités

Def : Soit E un espace affine réel E et C une partie de E. C est dit convexe ssi $\forall (M, N) \in C^2$, $[MN] \subset C$ où $[MN] = \{M + \lambda \overrightarrow{MN} / 0 \leq \lambda \leq 1\}$

Rq : Une partie convexe est donc une partie dont pour tout couple de point M et N, le segment [MN] est contenu dans C

Lemme crucial : Avec les notations précédentes, il est équivalent de dire :

– $\forall (M, N) \in C^2$, $[MN] \subset C$

– le barycentre G de toute famille finie $(A_i, \lambda_i)_i$ de points pondérés de C tq $\lambda_i \geq 0$ et $\sum \lambda_i = 1$ appartient à C

Rq : Donne une déf équivalente plus pratique de la convexité

Ex : cf annexe

Prté : L'intersection de convexe est convexe

Si $f : E \to E'$ affine et C et C' convexe de E et E', alors $f(C)$ et $f^{-1}(C')$ sont convexes de E' et E.

2) Enveloppe convexe

Def : Soit X une partie $\neq \emptyset$ de E. L'enveloppe convexe de X, notée C(X) est la plus petite partie convexe de E qui contient X.

Rq : $C(X) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ X \subset C}} C$ par les propriétés des convexes

Ex : cf annexe

Prop : C(X) est égal à l'ensemble des barycentres des points de X affectés de coefficients positifs ou nuls.

Appli : Th de Gauss Lucas : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P

Th de Carathéodory : Soit X une partie $\neq \emptyset$ de E et $\dim(E) = n$. Alors tout élément de C(X) est barycentre de n+1 points de X

Rq : Ainsi, il suffit de se restreindre au ≤ de n+1 points, on a déjà tout.

Coro : Soit X une partie $\neq \emptyset$ de E
Alors X compact $\Rightarrow$ $C(X)$ compact
si X est borné, alors $C(X)$ aussi et $S(X) = S(C(X))$

3) Points extrémaux d'un convexe

Def : Soit C un convexe et $M \in E$.
M est un point extrémal de C si l'égalité $M = P + \lambda \vec{PQ}$ avec $\lambda \in]0,1[$ et $P, Q \in C$ implique $M = P$ ou $M = Q$
(ie si $P \neq Q$, on a $t = 0$ ou $t = 1$)
On note $E(X)$ l'ensemble des points extrémaux de X.
Rq : un point extrémal c'est un point qui n'est pas barycentre de 2 points distincts

Prop : Avec les notations précédentes, il est équivalent de dire :
- M est extrémal pour C
- $C \setminus \{M\}$ est convexe

Rq : Il faut se ramener à $M = Bar((P, \frac{1}{2}), (Q, \frac{1}{2}))$

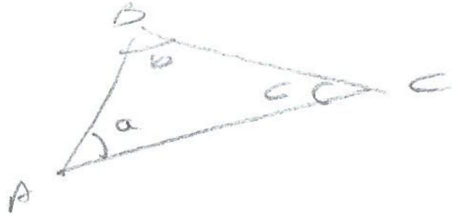
Prop : Soit C convexe de E. Alors $f : E \to E$ affine telle que $f(C) = C$ permute les points extrémaux de C.

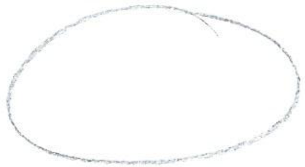
Ex : cf Annexe.
Avec E euclidien, $B(0,1)$ la boule unité a pour point extrémaux la sphère unité S^n et $C(S^n) = B(0,1)$

Th de Krein-Milman : Pour tout convexe compact $\neq \emptyset$ X de E, on peut écrire $X = C(E(X))$

Références : COMBES
AUDIN
TAUVEL (Géométrie)

Dessin triangle
orthocentre
centro de gravité
cercle circonscrit

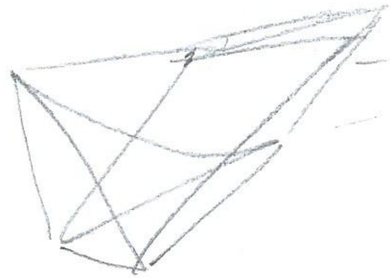




convesso

pas convesso

pas convesso



$C(x)$

$o = \Sigma C(\text{cami})$