**Méthodes combinatoires**
**Problème de dénombrement**

# I Techniques de dénombrement

## 1) Techniques de base

Déf : Un ensemble $E$ est dit de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe une bijection de $E$ sur l'ensemble $[\![1,n]\!]$.
On le note $Card(E) = n$ ou $|E| = n$

Propté : Si $E \to [\![1,n]\!]$ est injectif (resp. surjectif) alors $Card(E) \leq n$ (resp. $Card(E) \geq n$)

Propté : Soient $E_1, E_2$ deux ensembles finis. Alors
$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|$

Prop : Principe de récurrence : soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensemble finis telque, pour $f : E \to \mathbb{N}$, $Card(E_n) = f(Card(E_{n-1}))$. Alors on peut calculer par récurrence $Card(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex : $Card(S_n) = n!$

Appli : Formule du crible
Pour $n$ ensemble finis $E_1, \dots, E_n$ on a :
$$Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Card(E_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} Card(E_i \cap E_j) + \dots$$
$$+ (-1)^{p} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} Card(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_p}) + \dots (-1)^{n} Card\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)$$

En particulier, si les ensembles sont deux à deux disjoints, alors $Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Card(E_i)$
C'est le principe d'addition.

Prop : Soit $E_1$ et $E_2$ deux ensembles finis. Alors
1. $Card(E_1 \times E_2) = Card(E_1)\, Card(E_2)$
2. L'ensemble des applications de $E_1$ dans $E_2$ est fini et vaut $Card(E_2^{E_1}) = Card(E_2)^{Card(E_1)}$

Ex : L'ensemble des parties à 2 éléments de $[\![1,n]\!]$ est de cardinal $2^n$.

Prop : Principe du double comptage :
Deux dénombrements différents d'un même ensemble donnent le même résultat.

Lemme des bergers : Soient $E_1$ et $E_2$ deux ensembles finis. Soit $\varphi : E_1 \to E_2$ surjective telque $\forall x \in E_2$, $|\varphi^{-1}(\{x\})| = n$. Alors $Card(E_1) = n\, Card(E_2)$.

Rq : Pour compter les moutons, on compte les pattes et on divise par 4.

Principe des tiroirs : Soient $E_1$ et $E_2$ deux ensembles finis. Si $Card(E_1) > Card(E_2)$, alors il n'y a pas d'application injective de $E_1$ dans $E_2$.

Rq : Ranger $n$ chaussettes dans $m < n$ tiroirs force à avoir un tiroir avec au moins 2 chaussettes.

## 2) Tirages, arrangements et combinaisons

Soit $E = [\![1,n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$

Il y a 4 expériences de bases de tirages de $p$ éléments de $E$ (avec tirage équiprobable) :

1/ – il y a tirage sans remise et sans ordre

Le résultat de l'expérience est une partie de $[\![1,n]\!]$

Déf : Le nombre de telles parties est appelé combinaison de $p$ éléments parmi $n$ et est noté $\binom{n}{p}$ (ou $C_n^p$)

Prop : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

2/ – il y a tirage sans remise et avec ordre

Le résultat de l'expérience est un $p$-uplet de $[\![1,n]\!]$

Déf : Le nombre de tels $p$-uplets est appelé arrangement de $p$ éléments parmi $n$ et est noté $A_n^p$

Prop : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

3/ – il y a tirage avec remise et sans ordre

Le résultat de l'expérience est une liste non ordonnée d'éléments de $[\![1,n]\!]$ de longueur $p$.

Déf : Le nombre de telles listes est noté $\Gamma_n^p$

Prop : $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$

4/ – il y a tirage avec remise et avec ordre

Prop : Il y a $n^p$ résultats possibles

Rq : $A_n^p$ correspond aux applications injectives de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$

De même, la situation 2/ correspond au tiercé et la situation 1/ correspond au loto.

On retrouve $p!A_n^p = \binom{n}{p}$ ce qui est logique.

Ex : Pour $p=3$, $n=5$, on obtient :

$\binom{n}{p} = 10$, $A_n^p = 60$, $\Gamma_n^p = 35$ et $n^p = 125$

# II Application de l'algèbre au dénombrement

## 1) Grâce à la théorie des groupes

Déf/Not : Soit $G$ un groupe agissant sur un ensemble $X$ et $x \in X$, $g \in G$

$G(x) = \{g \cdot x \,/\, g \in G\}$ est l'orbite de $x$

$S(x) = \{g \in G \,/\, g \cdot x = x \ \forall x \in X\}$ est le stabilisateur de $x$

$Fix(g) = \{x \in X \,/\, g \cdot x = x\}$ est le fixateur de $g$.

Prop : Soit $G$ un groupe fini agissant sur $X$, un ensemble fini

Alors : $|X| = \sum_{x \in X/\mathcal{R}} |G(x)|$ (formule des classes)

$|G| = |S(x)| \cdot |G(x)|$

$|X/\mathcal{R}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$ (formule de Burnside)

Appli : coloriage du cube

Soit $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ $m$ couleurs différentes et $F = \{f_1, \dots, f_6\}$ les 6 faces du cube numérotées.

Pb : Combien y-a-t-il de coloriages différents du cube ?

Soit $G$ l'ensemble des isométries qui préservent le cube : $G \simeq G<$

On fait agir $G$ sur $C^F = X$ par $\left( \begin{smallmatrix} G \\ \sigma \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} C^F \\ \varphi \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} C^F \\ \varphi \circ \sigma \end{smallmatrix} \right)$

Alors un coloriage correspond à une orbite de cette action : c'est la donnée de $\varphi \in C^F$ modulo les coloriages obtenus par transformation du cube. Notons $x$ le nombre de coloriages

Prop : $x = \frac{1}{24} \sum_{\sigma \in G} m^{\omega(\sigma)}$ où $\omega(\sigma)$ est le nombre d'orbites de la permutation $\sigma$

Rq : On peut généraliser aux coloriages du polyèdre à $n$ côtés réguliers ou aux collier à $n$ perles (via le polygone à $n$ côtés et le groupe diédral $D_n$).

Ex : Si $m=2$, $x=10$ et si $m=3$, $x=57$

## 2) Avec les séries formelles et les séries génératrices

Soit $\mathbb{C}[[X]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ : c'est un anneau euclidien.

Déf : Soit $(a_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série génératrice de $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la série formelle $\sum_{i\geq 0} a_i X^i$

Ex : La suite $(1)_{i\in\mathbb{N}}$ admet $\frac{1}{1-X}$ comme génératrice
La suite $\left(\binom{n+k}{n}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ admet $\frac{1}{(1-X)^{n+1}}$ comme série génératrice

Pb 1 : Dérangement de $[\![1,n]\!]$
Un dérangement de $[\![1,n]\!]$ est un élément de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe

Prop : On note $d_n$ le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$.

- $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\frac{d_p}{(n-p)!} = 1$
- $d_n = n! \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}$

Rq : $(d_n)$ est donc une suite récurrente linéaire.

Appli : $n$ personnes se placent aléatoirement à une table. La probabilité que personne ne soit à la place attribuée est $\frac{d_n}{n!}$

Pb 2 : Nombre de Bell
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ : combien y a-t-il de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ ?
Ce nombre est appelé nombre de Bell et on le note $B_n$

Prop : $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$

Rq : Ils sont difficilement calculables et $(B_n)$ aussi suite récurrente.

**DEV 1** — Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne

Soit $a_1, \dots, a_p$ $p$ entiers naturels
On les suppose premiers dans leur ensemble.
Soit $c_n = |\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p \,/\, a_1x_1+\dots+a_px_p = n\}|$

Alors $c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1\cdots a_p}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$

Nombres de Catalan ?

## 3) Quelques calculs sur les corps finis

On note $\mathbb{F}_q$, "le" corps fini à $q$ éléments pour $q=p^n$, $p\in\mathcal{P}$

Ppté : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)\cdots(q^n-q^{n-2})(q^n-q^{n-1})$
$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = |PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{1}{q-1}|GL_n(\mathbb{F}_q)|$

Rq : $|PSL_n(\mathbb{F}_q)|$ est le nombre de droites différentes dans $\mathbb{F}_q^{\,n}$

Appli : Le groupe $GL_n(\mathbb{F}_p)$, $p\in\mathcal{P}$ et son cardinal joue un rôle important dans la démonstration des théorèmes de Sylow

Pptés : On a les isomorphismes exceptionnels :
$PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$

Déf : On appelle fonction de Möbius la fonction $\mu$ définie par, pour $n\in\mathbb{N}$
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \text{ est multiple d'un carré de nombre premier} \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est produit de } r \text{ premiers distincts.}\end{cases}$$

Ppté : Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ et $g\left(\begin{array}{l}\mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ n \mapsto \sum_{d|n} f(d)\end{array}\right)$
Alors on a la 1ère formule de Möbius : $f(n) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$

**DEV 2** — Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$

Soient $I_n(d,q)$ l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de degré $d$ sur $\mathbb{F}_q$ et $I(d,q) = |I_n(d,q)|$.
Alors :

1. $X^{q^n} - X = \prod_{d|n}\prod_{P\in I_n(d,q)} P$
2. $I(n,q) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d$
3. $I(n,q) \geq 1$, pour $n\in\mathbb{N}^*$
4. $I(n,q) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{q^n}{n}$

DEV 1 : Formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$ et LRQ

## 3) Exemple des déarrangements et des combinaisons

**Déf** : Soient $p, n$ deux naturels tq que $1 \leq p \leq n$ et $E$ un ensemble de cardinal $n$. Un arrangement de $p$ éléments de $E$ est un $p$-uplet formé de $p$ éléments distincts 2 à 2.

**Rq** : Un arrangement est une injection de $[\![1,p]\!]$ dans $E$.

**Prop** : Le nombre de $p$-arrangements dans $E$ est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

**Ex** : 10 chevaux participent à une course.
Il y a alors $A_{10}^3$ tiercés possibles (tiercé dans l'ordre).

**Rpl** : L'arrangement correspond aux tirages sans remise ordonnés

**Prop** : Soit un tirage de $p$ boules dans une urne contenant $n$ boules distinctes avec remise et ordonné.
Il y a $n^p$ tirages possibles.

**Ex** : On tire 3 boules avec remise dans une urne contenant les 10 chiffres. On regarde le nombre formé : il y a $1000 = 10^3$ nombres possibles (ouf !)

**Déf** : Soient $p, n$ deux naturels tel que $1 \leq p \leq n$ et $E$, $|E| = n$. Une combinaison de $p$ éléments de $E$ est une partie de $E$ à $p$ éléments

**Prop** : Le nombre de $p$-combinaison de $E$ est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$

**Rq** : En particulier, $A_p^n\, p! = \binom{n}{p}$ → logique

**Ex** : On organise un loto avec 10 boules de 0 à 9 et on en tire 3 sans remise, un ticket est composé de 3 numéros.
Il y a probabilité de gagner avec $1/\binom{10}{3}$.

**Rq** : La combinaison correspond aux tirages sans remise sans ordre

~~**Prop** : Soit~~

On pose $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n}{n!} X^n$

Alors $Se^X = \frac{1}{1-X}$ donc $S = \frac{1}{1-X} e^{-X}$

d'où le résultat

~~les $d_n$ sont difficilement calculables à la main~~

Motivez le développement avec l'histoire du parfement (2)

Possibilité de calcul explicite (non-demandée)

$$B_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j$$ (3)

On pose $S = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$ et on dérive

$$S' = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right)$$ d'où le résultat par $\Rightarrow \Sigma$

Motivation sur le tirage de $P \in \mathbb{F}_q[X]$ irréductible + th des nombres premiers (4)

### Références


[Bia] Jean de BIASI
Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation interne

[LeA] E. LEHMAN
Mathématiques pour l'étudiant de 1° année

[Com] COMBES

[S-P] SAUX-PICARD

[FGN1] Oraux X-ENS Algèbre 1