202

Exemples de parties denses et applications

Tous les espaces sont supposés métriques et munis de la topologie induite par sa distance.

I Définition et premiers exemples et applications

1) Définition et caractérisation de la densité.

Def : Soit (E,d) un espace métrique et soit $A \subset E$.

• $x \in \bar{A}$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tq $d(x,a) < \varepsilon$
ssi pour tout voisinage ouvert V de x, $V \cap A \neq \emptyset$

• A est dense dans E si $\bar{A} = E$

Prop : A est dense dans E ssi $\forall x \in E, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telque $a_n \to x$.

Ex : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$.

Appli : Une var X vérifiant $\forall s,t \geq 0$
$P(T > t+s) = P(T > t) P(T > s)$ et $P(T > 0) > 0$
suit une loi exponentielle.

Prop : Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$
alors G est soit dense $_{\text{dans } \mathbb{R}}$ soit du type $a\mathbb{Z}$ pour $a > 0$

Appli : L'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$

2) Exemples en algèbre

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on munit $M_n(K)$ d'une norme matricielle.

Prop : L'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

Rq ATT : Faux pour $\mathbb{R}$!

Prop : L'ensemble de matrices trigonalisables dans K est dense dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans K.

Prop : $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$

Appli : 1) Les polynômes caractéristiques de AB et de BA pour $(A,B) \in M_n(K)$ sont les mêmes.

2) Soit $\det \left(\begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{array} \right)$

Alors $\det$ est différentiable et pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$
$d_M \det(H) = \mathrm{Tr}({}^t\tilde{M} H)$ où $\tilde{M}$ est la comatrice de M

Prop : L'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang $\leq p$ est dense celui des matrices de rang r.

3) Densité et prolongement uniforme

Prop : Soient $f,g : E \to F$ où E,F espaces quelconques.
Si $\{f = g\}$ est dense dans E alors $f = g$ sur E.

Appli : toute application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ f telque $f(nx) = n f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ est linéaire.

Prop : Soit E espace quelconque et F espace complet et $A \subset E$ une partie dense et $f : A \to F$ unif cont sur A
Alors il existe une unique application continue $g : E \to F$ telque $g_{|A} = f$. De plus, g est unif cont.

II En théorie de la mesure

Soit $(X,\mathcal{A})$ espace mesurable et μ une mesure

Prop : Soit $f : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ mesurable. Alors il existe une suite (f_n) de fonctions étagées tq $\forall x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$.

De plus, si f est bornée, on peut choisir (f_n) tq la convergence soit uniforme et si f est positive, (f_n) peut être choisi croissante.

Def : Soit $p \in [1, +\infty[$; on note $L^p(\mu)$ les classes d'équivalences des fonctions de $(X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ telle que $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p} < +\infty$.

Propo : Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact sont denses dans $L^p(\mu)$ pour $p \in [1,+\infty[$ et $k \in \overline{\mathbb{N}}$.

Propo : Soit $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ et $p<q$.
$L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ est dense dans $L^q(\mu)$

Appli : Théorème de Plancherel - Riesz
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et notons $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Alors
- $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$
- il existe un unique automorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge $\left(\begin{array}{l} L^1 \cap L^2 \to L^2 \\ f \mapsto \hat{f} \end{array}\right)$

Rq : via le prolongement uniforme.

III Dans les espaces de Hilbert

Def : Un espace de Hilbert est un espace H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \rangle$ qui est complet pour la norme induite par celui-ci

Propo - Projection sur un sev fermé
Soit $(H, \langle \, | \, \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sev fermé de H.
Alors pour tout $x \in H$, $\exists ! y \in F$ tq $x-y \in F^\perp$
On note ce point $p_F(x)$ et est appelé projection de x sur F. orthogonale

Propo : $p_F \left(\begin{array}{l} H \to F \\ x \mapsto p_F(x) \end{array}\right)$ est une application linéaire 1-lipschitzienne de H.

Appli : F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$

DEV 1 - Espérance conditionnelle

Def : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H.
$(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne si :
- $\overline{\mathrm{Vect}(e_i, i \in I)} = H$ (famille totale)
- $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ (famille orthonormée)

Propo : Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne (dénombrable si il est séparable)

Propo : Soit H de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$
Il est équivalent de dire :
- $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne
- $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x | e_n \rangle e_n$
- $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x | e_n \rangle|^2$

Ex : Soit $L^2(\mathbb{T})$, l'ensemble des fonctions 2π périodiques tq $\|f\|_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt < +\infty$
c'est un espace de Hilbert.
Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{inx} \end{array}\right)$
Alors $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$
donc $\mathrm{Vect}(e_n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$.

IV Dans les espaces de fonctions

1) Avec le lemme de Baire

Def : Un espace métrique (E,d) est un espace de Baire s'il vérifie le lemme de Baire :
$\forall (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'ouverts denses de E, $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n} = E$.

Ex : Les espaces complets sont de Baire.

DEV 2 -

Th de Banach-Steinhaus

Soient E un espace de Banach et F un evn qlq.
Soit $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ l'ev des appl linéaires c° de E ds F
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$ telle que

$\forall x\in E$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\|_F < +\infty$

Alors $\exists M>0$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |||f_n||| \leq M$

Appli : La limite simple d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$ est aussi élément de $\mathcal{L}_c(E,F)$.

2) ?

Références

GOURDON (Analyse & Algèbre)
MARCO
Objectif Agreg
HIRSCH - LACOMBE
EL LAAMRI