204

Connexité. Exemples et applications

Tous les espaces seront considérés métriques.
Soit (E,d) un espace métrique muni de la topologie induite par sa distance.

I Généralités

1) Définitions et premiers exemples

Déf : L'espace E est dit connexe si les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E

Propo : Il est équivalent de dire :
- E est connexe
- $\nexists (U_1, U_2)$, 2 parties ouvertes non vides de E tq que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $U_1 \cup U_2 = E$.

i.e le seul recouvrement de E en deux ouverts disjoints est $\{E, \emptyset\}$

Déf : Soit $A \subset E$ où (E,d) espace quelconque.
On dit que A est connexe si pour tout (U_1, U_2) ouverts de E tel que $A \subset U_1 \cup U_2$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ alors $A \subset U_1$ et $A \cap U_2 = \emptyset$ (ou l'inverse).

Rq : Cela revient à demander que A, muni de la distance induite sur A soit un espace connexe.

Ex : $\mathbb{R}$ est connexe mais pas $\mathbb{Q}$
Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

2) Propriétés de la connexité et premières applications

~~Propo : Soit (E,d) un espace connexe, (E',d') espace quelconque et soit $f : E \to E'$ continue. Alors $f(E)$ est connexe.~~

Caractérisation des connexes : Soit $D = \{0,1\}$ muni de la distance discrète. Il faut $f(C)$ connexe $C \subset \mathbb{R}$, f c°.
Alors (E,d) est connexe ssi toute application continue $f : E \to D$ est constante.

Propo : Soit A une partie de E quelconque et A connexe. Si $B \subset E$ vérifie $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Propo : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de (E,d) quelconque tq $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.
Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Appli : Composante connexe de E.
On définit sur E la relation d'équivalence suivante : pour $x, y \in E$
$x R y \Leftrightarrow \exists C$ partie connexe de E tq $x \in C, y \in C$

Déf : On appelle composante connexe d'un élément x de E la classe de x pour cette rel d'équiv.

Csq : $|E/R| = 1 \Leftrightarrow E$ est connexe.

Prté : Les composantes connexes sont des fermés qui partitionnent E et sont ouvertes si elles sont en nombre fini.

Propo : Soit (E,d) connexe, (E',d') quelconque et soit $f : E \to E'$ continue. Alors $f(E)$ est connexe

Appli : ~~Théorème des valeurs intermédiaires~~ ~ thé Darboux
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (i.e un connexe de $\mathbb{R}$) et $f : I \to \mathbb{R}$ c°
Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (i.e un connexe de $\mathbb{R}$)

Théorème de passage des douanes : Soit E quelconque.
Soit $A \subset E$ et $B \subset E$, B connexe tel que $\mathring{A} \cap B \neq \emptyset$ et $^c\bar{A} \cap B \neq \emptyset$. Alors $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$ $(Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A})$

Coro : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue.
Alors $\exists c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Propo : Le produit fini d'espaces connexes est connexe.

3) Connexité par arcs

Déf : L'espace E est dit connexe par arcs si pour tout $(x,y) \in E^2$ il existe $\gamma : [0,1] \to E$ continue tq $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Ex : Les parties convexes sont connexes par arcs.
Les parties étoilées sont connexes par arcs.

Prté : La connexité par arcs implique la connexité.

+ C-ex du peigne.

IV Exemples et applications

1) Analyse complexe

2) Groupes matriciels

3) Autres

Th de Brouwer

Références (pour I)

MARCO - Analyse pour la licence

GOURDON