205

Espaces complets
Exemples et applications

On considère ici que des espaces métriques muni de la topologie induite par la distance.

I Généralités

1) Définitions

Déf : Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \ d(x_p, x_q) < \varepsilon$

Rmq : Une suite convergente de (X,d) est de Cauchy mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
Une suite de Cauchy est bornée.

Déf : Un espace (X,d) est complet si toute suite de Cauchy converge dans (X,d).
Si de plus, l'espace est un espace vectoriel normé, on parle d'espace de Banach.

Rq : Dans les espaces complets, pas besoin de connaître la limite pour vérifier une convergence de suite.

2) Propriétés des espaces complets

Soit (X,d) un espace métrique complet (sauf mention contraire)

Déf : Une partie de X est complète si l'espace métrique induit est complet

Propo : $\cdot \forall (X,d)$ métrique, toute partie complète de (X,d) est fermée
$\cdot$ Toute partie fermée de (X,d) complet est complète.

Déf : Pour $A \subset X$, le diamètre de A est l'élément de $[0,+\infty]$
$\mathrm{diam}(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} (d(x,y))$

Propo : Soit (X,d) un espace métrique. Il est équivalent de dire :
- (X,d) est complet.
- Pour toute suite décroissante pour l'inclusion $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides de X telle que $\lim_{n\to\infty}(\mathrm{diam}(F_n)) = 0$, il existe $x \in X$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$

De plus, ce point x est unique.

Propo : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Il est équivalent de dire :
- $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (ie complet)
- Toute série absolument convergente est convergente

Propo : Le produit fini d'espaces complets est complet pour la distance produit.

Ex : Tout espace vectoriel normé de dimension finie est de Banach.

3) Applications générales

Th : Prolongement des fonctions uniformément continues :
Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et on suppose (F, d_F) complet. Soit A une partie dense de E et $f : A \to F$ uniformément continue.
Alors il existe une unique application $g : E \to F$ continue telle que $g_{|A} = f$.
De plus, g est uniformément continue.

Coro : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach et A un sev dense de E et $u : A \to F$ une application linéaire continue.
Alors il existe une unique application $v : E \to F$ continue tq $v_{|A} = u$. De plus, v est linéaire.

Th du point fixe de Picard :
Soit (E, d_E) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante.
Alors f possède un unique point fixe $a \in E$.

Rq : ce résultat intervient de manière cruciale dans la démonstration des théorèmes de Cauchy-Lipschitz et d'inversion locale.

Appli : La méthode de Newton.
On cherche à approximer un zéro de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un voisinage de cette solution, on définit ~~par~~
$F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Alors F est contractante et l'unique point fixe de F est le zéro cherché de f.

4) Premiers exemples

1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ est complet, mais $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ne l'est pas
2) Soient E et F deux evn avec F de Banach.
Alors l'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues est un espace de Banach pour la norme subordonnée
3) Soit E un espace de Banach et (X, d) métrique
Soit $\mathcal{B}(X, E) = \{f : X \to E \mid f \text{ bornée}\}$
$\mathcal{C}^0(X, E) = \{f : X \to E \mid f \text{ de classe } C^0\}$
muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, ce sont des espaces de Banach.

II Exemples et applications

1) Espaces $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré
Def : Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, g quelconque.
On définit $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$
et alors $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.
On définit $\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 \mid \mu(\{|f| > M\}) = 0\}$
et alors $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé

DEV 1 — Théorème de Riesz-Fischer

1) Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ mesurables.
Alors $\left\|\sum_{n \geq 1} f_n\right\|_p \leq \sum_{n \geq 1} \|f_n\|_p \leq +\infty$

2) $\forall p \in [1, +\infty[$, l'espace $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est de Banach
3) L'espace $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach

Appli 1 : Soit $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mathbb{R})$.
Alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ définie sur $L^1(\mathbb{R})$ est en fait un élément de $L^2(\mathbb{R})$

Rq : C'est le théorème de prolongement pour une appli linéaire continue ($L^2(\mathbb{R})$ complet) !

Appli 2 : Supposons l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{T}$ définie pour $X \in L^2(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
On peut prolonger la définition pour $X \in L^1(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et obtenir l'espérance conditionnelle comme élément de L^1 via la complétude de $L^1(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

2) Espaces de Hilbert

Déf : Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'un produit hermitien (dans scalaire si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) noté $\langle \mid \rangle$ qui induit la norme notée $\|\cdot\|$.

H est de Hilbert s'il est complet pour la norme $\|\cdot\|$

Rq : C'est donc un cas particulier d'espace de Banach.

Th - Projection sur un convexe fermé :

Soit C un convexe non vide fermé d'un espace de Hilbert. Soit $x\in H$

Alors il existe un unique point qu'on note $p_C(x)$ tel que $\|x-p_C(x)\| = d(x,C) = \inf_{a\in C}\|x-c\|$

2 Appli : Espérance conditionnelle sur $L^2(\mathbb{P})$

$L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ est un espace de Hilbert. Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu. On considère $L^2(\Omega,\sigma(\mathcal{T}),\mathbb{P})$ un sev fermé de $L^2(\mathbb{P})$

Alors $\forall X\in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, la projection orthogonale Y de X sur $L^2(\Omega,\sigma(\mathcal{T}),\mathbb{P})$ définit une va $\sigma(\mathcal{T})$-mesurable tel que $\forall Z$ $\sigma(\mathcal{T})$-mesurable, $E(XZ)=E(YZ)$

Y est l'espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{T}$.

Appli 2 : Sur les bases hilbertiennes ? (surjectivité de $f \mapsto \langle f \mid e_i\rangle$?)

3) Lemme de Baire

Prop : Soit (X,d) un espace métrique complet.

Alors (X,d) vérifie le lemme de Baire :

pour toute suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X denses dans X, alors l'intersection des U_n est dense dans X ie $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n} = X$

Not : Soit $I=[0,1]$ et notons $\mathcal{C}^0(I)=\{f : I\to\mathbb{R} \mid f\ \mathcal{C}^0\}$

Alors $\mathcal{C}^0(I)$ est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ qui est complet.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions continues sur I et nulle part dérivable.

$\boxed{\text{DEV 2}}$ — Densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}^0(I)$ —

> Les fonctions $\mathcal{C}^0$ sur I et nulle part dérivables forment un ensemble dense de $\mathcal{C}^0(I)$ ie $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{C}^0(I)$

R : Pourtant - dur de construire une appli de $\mathcal{D}$!

Th de Banach-Steinhaus : Soit E un espace de Banach et F un evn. On munit $\mathcal{L}_c(E,F)$ de la norme subordonnée $|||\cdot|||$ à celle de F. Soit $(u_n)\in\mathcal{L}_c(E,F)^{\mathbb{N}}$ tel que

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n(x)\| < +\infty \quad \forall x\in E$

Alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} |||u_n||| < +\infty$

ie $\exists M\in\mathbb{R}$ tel que $\|u_n(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x\in E$

- Ex d'appli : fct réglées et étagées et intégrale de Riemann
- Vi o les fermés emboîtés

Les Banach sont à l'arrivée !

Références :

[Gou] GOURDON Analyse

[Mar] J.P. MARCO Analyse pour la licence

[Maz] MAZLIAK

[H-L] HIRSCH-LACOMBE

[B-P] BRIANE-PAGES

[ALB] C. ALBERT Topologie

[LAM] El Haj LAAMRI Mesures, intégration, convolution et transformées de Fourier des fonctions