208. Espaces vectoriels normés Application linéaires continues Exemples

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Généralités

1) Définitions et premiers exemples

Déf : Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Rq : (E, d) où $d(x,y) = \|x-y\|$ pour $(x,y) \in E^2$ est un espace métrique.

→ Les espaces normés sont munis de la topologie induite par la distance précédente.

Déf : Un espace vectoriel normé (evn) E est dit de Banach s'il est complet pour la distance associée à la norme.

Déf : Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \mid \rangle$ est dit de Hilbert s'il est complet pour la norme associée à ~~ce~~ produit scalaire.

Ex : 1/ $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach pour $n \in \mathbb{N}^*$

2/ Soit X un ensemble, $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{K}$. Notons $B(X, E)$ l'ensemble des fonctions de X dans E bornées quand en $\mathbb{K}$-ev.

C'est un espace normé s'il est muni de la norme $\|\cdot\|_{sup}$ où $\|f\|_{sup} = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$

De plus, il est de Banach si E est de Banach

Soient E et F deux evn.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F

$\mathcal{L}_c(E,F)$ — des applications linéaires continues de E dans F

et $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}_c(E)$ lorsque $E = F$

Soient E, F deux evn. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

Il est équivalent de dire :

- f est continue ie $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$
- f est continue en 0
- $\exists M > 0$ telque $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|$
- f est lipschitzienne.

Prop : Soit $|||\cdot|||$ $\left(\begin{array}{l} \mathcal{L}_c(E,F) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F \end{array} \right)$

C'est une norme de $\mathcal{L}_c(E,F)$

ie $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel normé.

Prop/Déf : Si $(f,g) \in \mathcal{L}_c(E,F)^2$ alors $|||f \circ g||| \leq |||f||| \times |||g|||$

Prop : Si F est de Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ est de Banach.

2) Cas de la dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n

Prop : Toutes les normes de E sont équivalentes ie si N, $\|\cdot\|$ sont deux normes de E, $\exists (m, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $m < M$ tel que $\forall x \in E$, $m N(x) \leq \|x\| \leq M N(x)$

Coro : Soit E un evn de dimension finie n et F un evn de dimension quelconque

toute application linéaire de E dans F est continue

ie $\boxed{\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)}$

Rq : En particulier, $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_c(E)$ si E de dim finie

Coro : Tout evn de dim finie est de Banach.

Ex : Pour toute norme matricielle, $M_n(\mathbb{K})$ est complet.

Prop : Soit E un evn. Il est équivalent de dire :

- E est de dimension finie
- La boule unité (pour la norme) est compacte.

Rq : C'est un théorème de Riesz

E, E' le dual (resp dual topologique) de E.

II Espaces de Banach et applications linéaires continues

Dans ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|_E)$ désigne un espace de Banach.

Th : Il est équivalent de dire, pour $(E, \|\cdot\|)$ evn quelconque :
— E est un espace de Banach
— Toute série absolument convergente est convergente
i.e. $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n\geq 0} \|u_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$

1) L'espace $\mathcal{L}_c(E)$

Rappel : $(\mathcal{L}_c(E), |||\cdot|||)$ est un espace de Banach.
Rq : C'est notamment le cas quand E est de dimension finie.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ tq $|||f||| < 1$. Alors $Id_E - f$ est inversible dans $\mathcal{L}_c(E)$ et vérifie
$(Id_E - f)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f^n$

Prop : Soit U l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E inversibles d'inverse continue.
Alors U est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$
Rq : $u^{-1} \in \mathcal{L}_c(E)$ car $\mathcal{L}_c(E)$ est de Banach.

Appli : On définit l'exponentielle d'un élément f de $\mathcal{L}_c(E)$ notée e^f par $e^f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}$ (qui est bien déf)
Propriété : $\forall f \in \mathcal{L}_c(E)$, $e^f \in U$ et $(e^f)^{-1} = e^{-f}$

2) Les espaces $L^p(\mu)$, $p \in [1,+\infty]$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
Soit $\mathcal{F}(X,\mathbb{K}) = \{$fonctions de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurables$\}$
Déf : On définit, pour $p \in [1,+\infty[$
• $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu) = \{f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$ (abrégé $\mathcal{L}^p$ s'il n'y a pas d'ambiguïté)
• pour $f \in \mathcal{L}^p$, $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} \in [0,+\infty]$
• pour f qcq, $\|f\|_\infty = \inf_{M>0}\{\mu(\{|f|>M\}) = 0\} \in [0,+\infty]$
• $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu) = \{f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) \mid \|f\|_\infty < +\infty\}$

Déf : Soit $q \in [1,\infty]$, on déf la relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^q$
$f \sim_q g \iff \|f-g\|_q = 0$
Déf : Le quotient de $\mathcal{L}^p$ par $\sim_p$ est noté $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$
Prop : $(L^p(X,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-evn pour $p \in [1,\infty]$

DEV 1 — Théorème de Riesz-Fischer
1) (Lemme) Soit $p \in [1,+\infty[$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives de X dans $\mathbb{R}_+$.
Alors $\|\sum_{n\geq0} f_n\|_p \le \sum_{n\geq 0}\|f_n\|_p \le +\infty$
2) Pour $p\in[1,+\infty[$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est de Banach
3) $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach

Props : Soient $p,q \in [1,+\infty]$, alors :
· $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ si $p<q$ ssi μ est une mesure finie

Prop : Soient $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ conjugués ie $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
Supposons μ σ-finie.
Soit $\phi \in (L^p(\mu))'$ une forme linéaire continue.
Alors $\exists! g \in L^q(\mu)$ tel que $\forall f \in L^p(\mu)$,
$\phi(f) = \int_X fg\,d\mu$ avec $\|g\|_q = |||\phi|||$
i.e. $\phi(f) = \varphi_g(f)$ où $\varphi_g \left(\begin{array}{l} \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p \\ f \mapsto \int_X fg\,d\mu \end{array} \right)$

Rq : C'est la dualité $L^p - L^q$.
Il y a donc un isomorphisme isométrique entre $(L^p)'$ et L^q
Prolonge le théorème de Riesz valable pour $L^2(\mu)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

3) Le lemme de Baire et ses conséquences

Thm : Les espaces de Banach vérifient le lemme de Baire : toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Th de Banach-Steinhaus : Soit E de Banach et F evn quelconque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\|_F < +\infty$ $\forall x\in E$.
Alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} |||f_n||| < +\infty$
i.e. $\exists M>0$ tel que $\forall x\in E, \forall n\in\mathbb{N}, \|f_n(x)\|_F \le M\|x\|_E$

Cor : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ tq $\forall x\in E$, $f_n(x)$ converge vers une limite $f(x)$.
Alors : - $\sup_{n\in\mathbb{N}} |||f_n||| < +\infty$
- $f \left(\begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right)$ est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ vérifiant $|||f||| \le \underline{\lim}_n |||f_n|||$

III Espaces de Hilbert et applications linéaires continues.

1) Propriétés

Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace de Hilbert et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Ppté : $\forall (x,y)\in E^2$, on a l'identité du parallélogramme :
$\|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Prop : Soit C une partie convexe fermée de E (non vide). Alors, pour tout $x\in E$, il existe un unique point y de C vérifiant $\|x-y\| = d(x,C)$.
y est appelé projection de x sur C et on le note $p_C(x)$.

Prop : Soit $p_C \left(\begin{array}{l} H \to C \\ x \mapsto p_C(x) \end{array} \right)$; p_C est une application 1-lipschitzienne.

Prop : Soit F un sev fermé de E. Alors la projection de tout $x\in E$ sur F notée $p_F(x)$ est l'unique y tel que :
- $y\in F$
- $\forall z\in F$, $\langle x-y | z\rangle = 0$

De plus, l'application $p_F \left(\begin{array}{l} H \to F \\ x \mapsto p_F(x) \end{array} \right)$ est une application linéaire continue de noyau $F^\perp$.

Th de Riesz-Fréchet : Pour $y\in E$, soit $\Phi_y \left(\begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \langle x|y\rangle \end{array} \right)$
Alors $\left(\begin{array}{l} E \to E' \\ y \mapsto \Phi_y \end{array} \right)$ est une isométrie surjective et, pour toute application linéaire continue φ, $\exists!\, a\in E$ tel que $\forall x\in E$, $\varphi(x) = \langle x|a\rangle = \Phi_a(x)$ avec $|||\Phi_a||| = |||\varphi|||$.

2) L'exemple de l'espérance conditionnelle

Ppté : Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert.
On se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où P est une probabilité.

DEV 2 — Espérance conditionnelle

Soit X une var tq $X\in L^1(P)$ et soit T une va qlcq.
On appelle espérance conditionnelle de X sachant T l'unique va Y $\sigma(T)$-mesurable telle que $\forall Z$ va bornée $\sigma(T)$-mesurable, on ait
$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(YZ)$$
On note $Y = \mathbb{E}(X|T)$

Questions posées :

→ sur le developpement 1

Pourquoi U est mesurable

Pourquoi si $f(x) = +\infty$ sur A, et $f \geq 0$, $\int_X f \, d\mu = +\infty$?

Car $\int_X f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \underbrace{\int_{A^c} f \, d\mu}_{\geq 0}$

et $\int_A f \, d\mu \geq \underbrace{n\mu(A)}_{\to +\infty}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

→ démontrer que $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ lorsque E est un evn de dim finie

→ comment démontrez-vous que p_C est 1-lipschitzienne

→ parler un peu de la dualité $L^p - L^q$

Références :

GOURDON

MARCO

HIRSCH-LACOMBE

BRIANE-PAGES

MAZLIAK

LAAMRI