214

Théorème d'inversion locale
Théorème des fonctions implicites
Exemples et Applications

I Généralités

1) Théorème d'inversion locale

Th : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que df_a soit inversible (ie la matrice jacobienne df_a soit inversible).
Alors il existe $V \subset U$ un voisinage de a, W un voisinage de $f(a)$ tels que l'application $f : V \to W$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur W.

Rq : • On peut résoudre localement $f(x) = y$ pour $x \in V$ en considérant $f^{-1}(x) = y$ pour $y \in W$ (cf annexe).
• De plus, on a l'égalité $D(f^{-1})_{f(x)} = (Df_x)^{-1}$ pour $x \in V$.
• Les voisinages sont pris ouverts dans cette leçon.

Cor : On obtient un théorème analogue avec f de classe $\mathcal{C}^k$ et en conclusion $f : V \to W$ $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Th d'inversion globale : Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ injective et telle que, $\forall x \in U$, df_x inversible.
Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $f(U)$.

Rq : Pas très pratique car hypothèse trop lourde.

Def : Un changement de coordonnées est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme ϕ de V sur $\phi(V) \subset \mathbb{R}^n$ pour V ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Prop : ϕ définit un changement de coordonnées sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ si et ssi $d\phi_a$ est inversible.

Rq : Cela est équivalent à demander que la famille $(df_1(a), \dots, df_n(a))$ soit libre pour $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_n \end{pmatrix}$.

Cor : Soient $f_1, \dots, f_p$ p fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Alors on peut compléter la famille par des fonctions $f_{p+1}, \dots, f_n$ en changement de coordonnées au voisinage de a si et ssi : $(df_1(a), \dots, df_p(a))$ est libre.

2) Théorème des fonctions implicites

Th : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ (n, p entiers ≥ 1), $(a,b) \in U$ et $f \left(\begin{matrix} U \to \mathbb{R}^p \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{matrix} \right)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a,b) = 0$ et que la matrice formée des dérivées partielles par rapport à y en (a,b) soit inversible.
Alors il existe V, voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$ et une application $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V telle que :
$$\left(\begin{matrix} x \in V \\ y \in W \end{matrix} \quad f(x,y) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(x \in V \quad \varphi(x) = y \right)$$

Rq : • L'hypothèse sur la matrice peut se réécrire : $y \mapsto f(a,y)$ admet une différentielle inversible en b.
• On peut résoudre localement $f(x,y) = 0$ en considérant $\varphi(x) = y$ pour $x \in V$ (cf annexe).
• En particulier, $\varphi(a) = b$.

Cor : On obtient un théorème analogue avec f de classe $\mathcal{C}^k$ et en conclusion φ de classe $\mathcal{C}^k$.

Rq : Il y a équivalence du th. des fonctions implicites et du th. d'inversion locale.

En effet, th d'inv locale ⟹ th de fcts implicites en posant $g(x,y)=(x,f(x,y))$

et th des fcts implicites ⟹ th d'inv locale en posant $F(x,y)=f(x)-y$.

Premiers exemples

- th du rang constant ?

II Exemples et applications

1) Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

__Prop__ : Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $k\in[[0,n]]$, $M\subset\mathbb{R}^n$ et $a\in M$. Il est équivalent de dire :

1/ – $\exists$ U et V voisinages de x et 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféo $f: U\to V$ tel que $f(U\cap M)=V\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\})$

2/ – $\exists$ U voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f: U\to\mathbb{R}^{n-k}$ une application C^1 telles que : $U\cap M=f^{-1}(\{0\})$

3/ – $\exists$ U voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, V voisinage de $(a_1,\dots,a_p)$ dans $\mathbb{R}^p$ avec $a=(a_i)_{1\le i\le n}$ et $g: U\to\mathbb{R}^{n-k}$ appli C^1 telles que, après permutations de coordonnées, $U\cap M=\Gamma(g)=\{(x',g(x'))\ /\ x'\in V\}$

4/ – $\exists$ U voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, Λ voisinage de 0 de $\mathbb{R}^k$ et $\varphi: \Lambda\to\mathbb{R}^n$ appli C^1 tq φ homéomorphisme de Λ sur $U\cap M$ avec $\varphi(0)=a$ et $d\varphi_0$ injective.

__Df__ : M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k si elle vérifie ces conditions en tout point pour le même k.

__Rq__ : 2/ ⟹ 3/ se fait grâce au th. des fonctions implicites

4/ ⟹ 3/ se fait grâce au th. d'inversion locale.

$\boxed{\text{DEV 1}}$ — Théorème des extremas liés

Soient $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 (avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$).

Soit $\Gamma=\{x\in U \mid g_1(x)=\dots=g_r(x)=0\}$

Soit $a\in\Gamma$ tel que $f_{|\Gamma}$ admet un extremum en a et que $(dg_1(a),\dots,dg_r(a))$ soit libre

Alors il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in\mathbb{R}^n$ uniques tels que $df(a)=\lambda_1 dg_1(a)+\dots+\lambda_r dg_r(a)$

Lof
Rou

Go

Rq : Les $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Appli : • Sur $X = \{(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \,/\, \|v_i\| = 1 \ \forall i\}$ le maximum du déterminant est atteint en $(v_1, \dots, v_n)$ pour $(v_1, \dots, v_n)$ base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

• A surface fixée, le parallélépipède de volume maximal est le cube.

2) Lemme de Morse

$\boxed{\text{DEV 2}}$ — Lemme de Morse

Soient U voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $df_0 = 0$ et d^2f_0 est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe un changement de coordonnées $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) - \dots - \varphi_n^2(x)$

Rq : Par un changement de coordonnées, f devient une forme quadratique de signature $(p, n-p)$ (cf annexe)

Appli position plan tangent

Références

ROUVIERE

LAFONTAINE