215 Idée : Généraliser la notion de dérivée Réf : Rouvière, Marco, Gourdon

Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

I Applications différentiables

1) Définitions et premières propriétés

Déf : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \Omega$.
Une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est dite différentiable en a si $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}^n$
$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0$
Cette application est appelée différentielle de f en a.

Rq : Comme on est en dimension finie, L est continue.

Ppté : La différentielle de f en a est unique. On la note df_a.

Déf : f est dite différentiable sur Ω si $\forall a \in \Omega$, f est différentiable en a.

Ex : 1/ f est une fonction affine : $f(x) = \alpha x + \beta$ ($\alpha \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\beta \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$)
Alors f est différentiable sur tout $\mathbb{R}^n$ et $df_a(h) = \alpha h$ $\forall a \in \mathbb{R}^n$

2/ $f \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^m \\ (x, y) \mapsto f(x,y) \end{array} \right)$ bilinéaire continue)
Alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$
$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $df_{(a,b)}(h,k) = f(a,k) + f(h,b)$

3/ Lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ ssi f est dérivable en a, et alors $\forall h \in \mathbb{R}$, on a
$df_a(h) = f'(a)h$
On retrouve la dérivée ! Ouf !)

Ppté : Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.
Les applications différentiables d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) en $a \in \Omega$ forment un espace vectoriel.

2) Théorème de composition

Th : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in \Omega$
Soit $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(a) \in U$ tq $f(\Omega) \subset U$
Alors $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a et

$$\boxed{d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a}$$

Rq : C'est l'analogue de $(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x))$
C'est fondamental, permet de vérifier la différentiabilité et de calculer la différentielle !

Ppté : Le produit de deux applications $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ différentiables en a est différentiable en a et $d(fg)_a = df_a \cdot g + f\, dg_a$

Appli 1 : $\|\cdot\|_2 \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_2 \end{array} \right)$. $\mathbb{R}^n$ est muni d'une structure euclidienne
où $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ où (x_i) les coordonnées de x dans une base orthonormée.
Alors $\|\cdot\|_2$ est différentiable $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\forall h \in \mathbb{R}^n$
$$d(\|\cdot\|_2)_a(h) = \frac{\langle a, h \rangle}{\|a\|_2}$$

Appli 2 : $\det \left(\begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{array} \right)$ est différentiable $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
et pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(\det)_M(H) = \mathrm{Tr}({}^t\tilde{M} H)$
où $\tilde{M}$ désigne la comatrice de M)

Appli 3 : $\varphi \left(\begin{array}{l} GL_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^{-1} \end{array} \right)$ est différentiable $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$
et pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $d(\varphi)_M(H) = -M^{-1} H M^{-1}$
Rq : On retrouve $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

4) Dérivée suivant un vecteur, dérivée partielle, fonction C¹

Déf : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $n, m \in \mathbb{N}$, $a \in \Omega$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$
Soit $v \in \mathbb{R}^n$ fixé ; f est dérivable en a suivant le vecteur v si la fonction réelle $\varphi \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \\ t \mapsto f(a+tv) \end{array} \right)$ est dérivable en 0.
On note alors $f'_v(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$

Prop : Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $f'_v(a) = df_a(v)$

Rq/Att : La réciproque est fausse !

C-Ex $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}\end{array}$ est dérivable en $(0,0)$ selon tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas différentiable (même pas continue) en $(0,0)$

Rq : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, on garde les notations précédentes $(1 \subset \mathbb{R}^n)$. Alors $f : 1 \to \mathbb{R}^m$ admet une dérivée partielle en a d'indice i (pour $i \in [1,n]$) si f est dérivable en a selon le vecteur e_i.
et $\partial_{x_i} f(a) = f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} \left(f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_i + t \\ a_n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_n \end{pmatrix} \right) \right)$

Pté : Si f est différentiable en a, alors $\forall i \in [1,n]$, f admet une dérivée partielle en a d'indice i
Dans ce cas, $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$ où (dx_i) base duale dans $(\mathbb{R}^n)^*$ de B (par linéarité)

Rq/Att : La réciproque est fausse ! Même argument que précédemment

Def & Prop : Pour f différentiable en a, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{\nabla f}(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour $h \in \mathbb{R}^n$, $df_a(h) = \langle \overrightarrow{\nabla f}(a), h \rangle$
Ce vecteur est appelé gradient de f en a et $\overrightarrow{\nabla f}(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{i \in [1,n]}$

Def : $f : 1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si l'application $df : \begin{pmatrix} 1 \to \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ a \mapsto df_a \end{pmatrix}$ est continue (et f différentiable)

Prop : Si f admet des dérivées partielles sur 1 (en $\forall$ point de 1) et si elles sont continues sur 1 si et ssi f est différentiable et est $\mathcal{C}^1$ et $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$ / Avouer

Appli : det !

Prop : Soit $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ une base de $\mathbb{R}^m$. Alors $f = \sum_{i=1}^{m} f_i \varepsilon_i$
f différentiable en a alors $\forall i \in [1,m]$ f_i différentiable en a
et alors $df_a(e_j) = \sum_{i=1}^{m} d(f_i)_a(e_j)\, \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\, \varepsilon_i$

On appelle matrice jacobienne la matrice de $df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$.

Prop : Soit $F = f \circ \varphi$, $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ et $\varphi : 1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(1) \subset U$ où $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, soit $a \in 1$ tq φ diff en a et f diff en $\varphi(a)$
Alors F est différentiable en a et $\frac{\partial F}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a))\, \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a)$

3) Théorème des accroissements finis

Lemme : Soient $f, g : [a,b] \to F$, dérivables sur $]a,b[$ tq $\forall x \in]a,b[$, $\|f'(x)\| \leq g'(x)$
Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

Th des acc finis : Soit $f : 1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 1 ouvert tq f continue et différentiable sur 1. Alors pour $a, b \in 1$ tq $[a,b] \subset 1$
alors $\boxed{\|f(b) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \sup_{x \in [a,b]} ||| df_x |||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} \|b - a\|_{\mathbb{R}^n}}$

Coro : Soit 1 ouvert convexe et $f : 1 \to \mathbb{R}^m$ tq $df_x = 0$ $\forall x \in 1$
Alors f est constante sur 1.

Rq : Permet de démontrer la caractérisation des fcts $\mathcal{C}^1$.

Th : Soit 1 ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite d'applications de 1 dans $\mathbb{R}^m$ différentiables sur 1. On suppose que
- $f_k \longrightarrow f$ simplement sur U
- $Df_k \longrightarrow L$ uniformément sur L

Alors f est différentiable sur U et $df = L$

Rq : Garder si $\exists x \in 1$ tq $f_k(x)$ cv et si 1 convexe borné

Appli : L'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc différentiable) sur $\mathbb{R}^n$
et $d(\exp)_X(H) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} (X^{p-1}H + \dots + HX^{p-1})$

II Exemples et applications

1) Th. des extrema liés

2) Th d'inversion locale et des fonctions implicites

3) Sous-variétés

4) Matrices hessiennes et extremums locaux