Etude métrique des courbes Exemples

Soit $n \in \{2,3\}$, soit $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $<|>$
On considère $\mathbb{R}^n$ euclidien et $\mathcal{E}_n$ le plan affine euclidien.

I Généralités

1) Définitions

Déf : Soit I un intervalle $\neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
On appelle arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ toute application $f\left(\begin{array}{l} I \to \mathcal{E}_n \\ t \mapsto f(t) \end{array}\right)$ de classe $\mathcal{C}^k$

Déf : Soit $f: I \to \mathcal{E}_n$ un arc paramétré.
La trajectoire de f est la partie $f(I)$ de $\mathcal{E}_n$.

Rq : on dit que $f(I)$ est une courbe admettant f comme représentation paramétrique (r.p.)

Déf : Soit $f: I \to \mathcal{E}_n$ un arc paramétré $\mathcal{C}^k$. (chgt de p.)
- Un changement de paramétrage (de classe $\mathcal{C}^k$) de f est une application $\varphi: J \to I$ où J intervalle de $\mathbb{R}$ tq φ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme (ie φ bijective tq φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et I).
- Un paramétrage admissible (de classe $\mathcal{C}^k$) de f est un arc paramétré $g: J \to \mathcal{E}_n$ où J intervalle de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un changement de paramétrage φ de f tel que $g = f\circ\varphi$.

Déf/Propo : Deux arcs paramétrés f, g sont $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe un chgt de p. φ tel que $g = f\circ\varphi$
On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des arcs paramétrés.

Déf/Propo : Soit f un arc paramétré. Si φ est strictement croissante, alors f et $f\circ\varphi$ ont même sens.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur les changements de paramétrage qui a deux classes.
Orienter f, c'est choisir l'une de ces classes.

2) Tangente en un point et étude locale pour $n=2$

Déf : Soit $f: I \to \mathcal{E}_n$ un arc paramétré $\mathcal{C}^k$, de trajectoire Γ et soit $M(t) \in \Gamma$. Le point $M(t)$ est dit :
- régulier ssi $k \geq 1$ et $\vec{f'(t)} \neq \vec{0}$
- birégulier ssi $k \geq 2$ et $(\vec{f'(t)}, \vec{f''(t)})$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.

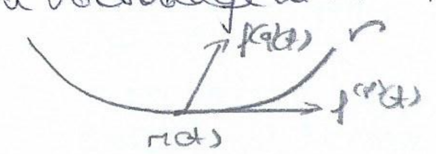
L'arc f est régulier ssi $\forall t \in I$, $M(t)$ est régulier et $k \geq 1$.

Propo : En tout point régulier $M(t) \in \Gamma$, Γ admet une tangente dirigée par $\vec{f'(t)}$ (ie une droite passant par $M(t)$ tangente à Γ)

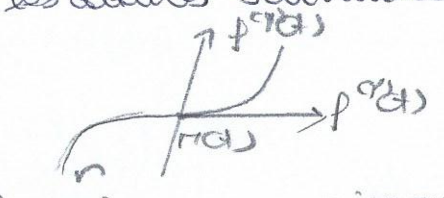
Pour $n=2$, on peut étudier localement la courbe au voisinage d'un point et classifier les cas possibles.

Th : Soit $f: I \to \mathcal{E}_2$ un arc paramétré de classe suffisante de trajectoire Γ. Soit
- p le plus entier ≥ 1 tq $\vec{f^{(p)}(t)} \neq 0$
- q le plus entier $> p$ tq $(f^{(p)}(t), f^{(q)}(t))$ libre.

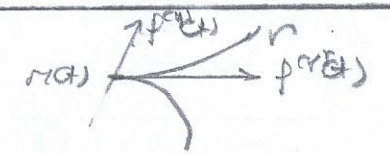
Au voisinage de $M(t)$, Γ a les allures suivantes :



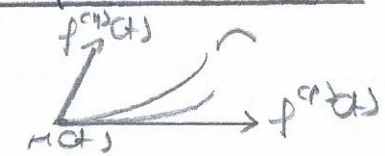
p impair q pair
Point d'allure normal



p impair q impair
Point d'inflexion



p pair q impair
Pt de rebroussement de 1° espèce



p pair q impair
Pt de rebroussement de 2° espèce

Rq At : Les "le ..." sont abusifs, à une constante près on [illegible]

(2)

3) Abscisse curviligne

Déf : Soit $f : I \to E_n$ une arc paramétré C^1 de trajectoire Γ.
On appelle abscisse curviligne sur Γ toute application $s : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I telle que $\forall t \in I,\ s'(t) = \|\overrightarrow{f'(t)}\|$

Déf : Soit s une abscisse curviligne sur Γ et $A = f(a)$, $B = f(b)$ $(A, B) \in \Gamma^2$
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ notée $\ell(\overset{\frown}{AB})$ est le réel $|s(b) - s(a)| = \left|\int_a^b \|\overrightarrow{f'(t)}\| dt\right|$

Déf : Un paramétrage normal de f est un paramétrage admissible g de classe C^1 de f tq $\forall u \in J$, $\|\overrightarrow{g'(u)}\| = 1$

Prop : Soit $f : I \to E_n$ un arc régulier de trajectoire Γ.
- Pour toute abscisse curviligne s sur Γ, $f \circ s^{-1}$ est un paramétrage normal de f
- Pour tout paramétrage g normal de f, il existe une abscisse curviligne s sur Γ tq $g = f \circ s^{-1}$.

4) Aire d'une courbe fermée

Prop : Soit $f : I \to E_2$ une courbe fermée de trajectoire Γ orientée positivement et délimitant le convexe borné de $\mathbb{R}^2$ D.
Supposons que $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in E_2$
Alors l'aire de D est donnée par la valeur absolue de
$\frac{1}{2} \int_I (x(t) y'(t) - y(t) x'(t))\, dt$.

Prop : Soit la courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par $\Sigma \begin{cases} (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^3 \\ f(x, y) = z \end{cases}$
où D surface de $\mathbb{R}^3$.
Soit Σ l'aire délimitée sur D

Inégalité isopérimétrique

*|

II Exemples

1) L'astroïde

Déf : L'astroïde est la trajectoire de la courbe $f : \mathbb{R} \to E_2$ donnée par $f(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Pptés :
- L'étude peut se ramener sur $[0, \frac{\pi}{4}]$
- Il y a 4 points de rebroussement de 1 espèce
- La courbe est fermée et l'aire délimitée est égal à $\frac{3\pi}{8}$.

La trajectoire est donnée dans le schéma 1.

2) Le folium de Descartes

Déf : Le folium de Descartes est la trajectoire de l'arc paramétré f où $f(t) = \begin{pmatrix} -t/1+t^3 \\ -t^2/1+t^3 \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Pptés :
- On peut restreindre l'étude à $]-1, 1[$
- Le point $(0, 0)$ est point double.
- Γ admet la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{3}$ pour asymptote.

La trajectoire est donnée dans le schéma 2

3) La cardioïde

Déf : La cardioïde est la trajectoire de l'arc $f : \mathbb{R} \to E_2$ paramétré en coordonnées polaires par
$f(\theta) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \\ \theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Pptés :
- On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$
- Le point $(0, 0)$ est un point de rebroussement de 2° espèce.

La trajectoire est donnée dans le schéma 3.

4) L'hélice circulaire à pas constant

Déf : L'hélice à pas constant circulaire est la trajectoire de l'arc paramétré $f : \mathbb{R} \to \mathcal{E}_3$ donné par

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ ht \end{pmatrix} \quad \text{où } h \in \mathbb{R}_+^*, \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

La trajectoire est donnée en annexe.

Pté : Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'angle formé par les vecteurs $\vec{k}$ et $\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|f'(t)\|}$ est constant.

Rq : D'où le nom de la trajectoire.

5) Fenêtre de Viviani

Référence

MONIER Algèbre & Géométrie MP
Géométrie MPSI, MP

Ireq iso

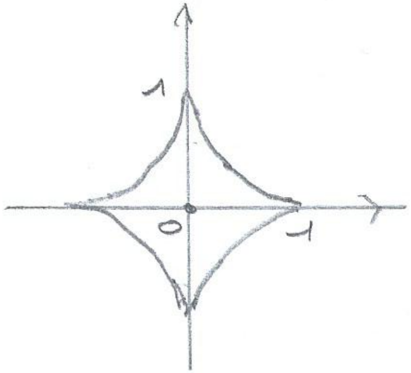


Schéma 1
L'astroïde

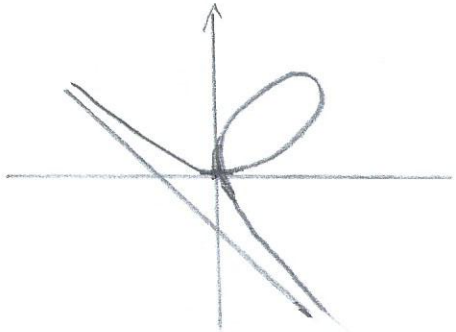


Schéma 2
Le folium de Descartes

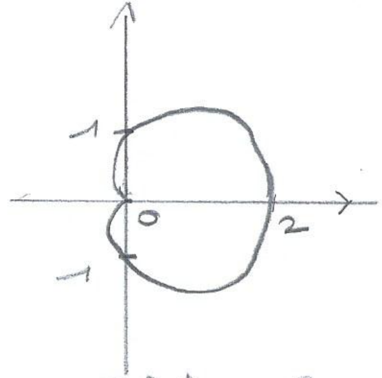


Schéma 3
La cardioïde

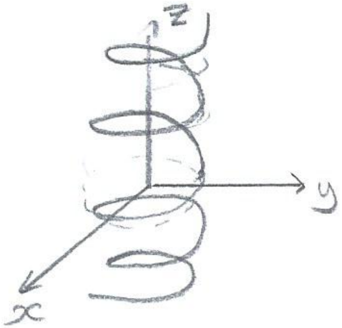


Schéma 4
L'hélice circulaire à
pas constant