217

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples

I Définitions d'une sous-variété

1) Rappels

Th d'inversion locale : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la différentielle de f en a notée df_a est inversible.

Alors il existe un voisinage V de a inclus dans U et un voisinage W de $f(a)$ tel que $f : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de V sur W.

Rq : Les voisinages seront pris toujours ouverts

Th des fonctions implicites : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ où $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a,b) \in U$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$, $U \to \mathbb{R}^p$, une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(a,b) = 0$ et que la matrice formé des dérivées partielles par rapport à y en (a,b) est inversible.

Alors il existe V (resp. W), voisinage de a ds $\mathbb{R}^n$ (resp. de b dans $\mathbb{R}^p$) avec $V \times W \subset U$ et une application $\varphi : V \to W$ tels que :

$(x \in V, y \in W, f(x,y) = 0) \iff (x \in V, \varphi(x) = y)$

de plus, φ est de classe $\mathcal{C}^k$

2) Définitions équivalentes

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![0, n]\!]$, soit M une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in M$ où $a = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$

Il est équivalent de dire :

1/ — "Forme normale" : il existe des voisinages U et V resp. de a et de 0 dans $\mathbb{R}^n$ respectivement et un difféomorphisme $f : U \to V$ tel que :

$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$

2/ — "Equation" : il existe un voisinage U de a ds $\mathbb{R}^n$ et $n-k$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$(x \in U \cap M) \iff \left(x \in U \text{ et } \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right)$$

$$\iff (x \in U \text{ et } x \in f^{-1}(\{0\}) \text{ où } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_{n-k} \end{pmatrix})$$

3/ — "Graphe" : il existe un voisinage U de a ds $\mathbb{R}^n$, un voisinage Λ de $(a_1, \dots, a_k)$ de $\mathbb{R}^k$ et $n-k$ fonctions $g_i : \Lambda \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que, après permutations des coordonnées, $U \cap M$ soit égal au graphe de $g := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_{n-k} \end{pmatrix}$ ie

$$(x \in U \cap M) \iff \left(\begin{array}{l} (x_1, \dots, x_k) \in \Lambda \\ \text{et } x_{k+1} = g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, x_n = g_{n-k}(x_1, \dots, x_k) \end{array} \right)$$

$$\iff (x' = (x_1, \dots, x_k) \in \Lambda \text{ et } (x', g(x')) = x)$$

4— "Paramétrage" : il existe un voisinage U de a ds $\mathbb{R}^n$, un voisinage Λ de 0 de $\mathbb{R}^k$ et n fonctions $\varphi_i : \Lambda \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}^n$ où $\varphi := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ vérifie :

- φ homéomorphisme de Λ sur $U \cap M$ avec $\varphi(0) = a$
- la différentielle $d\varphi_0$ est injective

Def : M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k si elle vérifie ces conditions en tout point, ou le même k
ie : k est unique

Rq : En 2, f est appelé submersion (ie df_0 surjective)
En 4, φ est appelé immersion (ie $d\varphi_0$ injective) (1)

3) Exemples et contre-exemples

1/ • Pour $k = n$, une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension n est un ouvert

et pour $k = 0$, une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension 0 est un ensemble discret

Hum

2/ • La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_2 = 1\}$
est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$
On applique le critère 2/ avec $f\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto \|x\|_2 - 1\end{array}\right)$

3/ • Le tore de $\mathbb{R}^{2n}$ $\mathbb{T}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \,/\, x_1^2 + x_2^2 = 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}$
est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n}$
On applique le critère 4/ avec $h\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}\\ (t_1, \dots, t_n) \longmapsto (e^{it_1}, \dots, e^{it_n})\end{array}\right)$

4/ • Le graphe d'une fonction C^1 est une sous-variété.
• En revanche, si la fonction n'est pas C^1, le graphe de f n'est pas une sous-variété.
Par ex, $Gr(|\cdot|)$ n'est pas une sous-variété

5/ • Le folium de Descartes n'est pas une sous variété à cause du point double.

6/ • Les hypersurfaces sont des sous-variétés

II Espace tangent

1) Définitions

Déf : Soient $M \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in M$.
Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent en a à M s'il existe une application différentiable $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ pour $\varepsilon > 0$ tq $c(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset M$, $c(0) = a$ et $c'(0) = v$
Rq : cf annexe

Propo : Les vecteurs tangents en un point a à une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$ forment un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$.

Déf : L'ensemble de ces vecteurs est appelé espace tangent en a à la sous-variété M.

Rq : On a vectorialisé un espace affine en a.

Not : On note $T_a M$ l'espace tangent en a à M

Propo : Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dim k et $a \in M$
- Sous les conditions de 2/, $T_a M = \mathrm{Ker}(Df_a)$
- de 3/, $T_a M = Gr(Dg_{(a_1, \dots, a_k)})$
- de 4/, $T_a M = \mathrm{Im}(Dh_0)$

Rq : $Gr(Dg_{(a_1, \dots, a_p)}) = \{x' + Dg_{a_1, \dots, a_p}(x') \,/\, x' \in \mathbb{R}^k\}$

2) Exemples

1/ • $T_a M = \{0\}$ pour M ss-variété de dimension 0
2/ • $T_a S^n = \{a\}^\perp$ pour $a \in S^n$
3/ • Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1, $T_x Gr(f) = f'(x)\mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1, $T_x Gr(f) = Gr(Df_x)$?

Th des extrema liés - Multi

III Exemples

1) Cas de $\mathbb{R}^3$

<u>Prop</u> : On peut classifier une sous-variété M de $\mathbb{R}^3$ selon dimension k :
- Si $k=1$, M est une courbe
- Si $k=2$, M est une surface

<u>Rq</u> : les cas $k=0$ et $k=3$ déjà traités

<u>Rq</u> : cf annexe

<u>Ex</u> : 1/. La fenêtre de Viviani :
C'est l'intersection des surfaces définies par
$x^2+y^2+z^2=1$ et par $x^2+y^2-x=0$
On peut la paramétrer par $t \mapsto (\sin^2 t, \sin(t)\cos(t), \cos(t))$
ce n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ mais
l'intersection de la courbe à $\{z>0\}$ est une sous variété
cf annexe $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

2/.

Fenêtre de Viviani ?

2) Sur les ensembles de matrices

$\boxed{\text{DEV 2}}$ — Théorème de von Neumann —

On munit $GL_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $\|\cdot\|$
Soit G un groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$
Alors G est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{R})$

<u>Lemme</u> : Soit $\mathcal{L}_G = \{m \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{tm} \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\}$ sev de $M_n(\mathbb{R})$
et soit S un supplémentaire de $\mathcal{L}_G$.
Alors il n'existe pas de suite $(m_k)_{k\geq 1}$ de $M \setminus \{0\}$
tendant vers 0 tq $e^{m_k} \in G \ \forall k \in \mathbb{N}^*$.

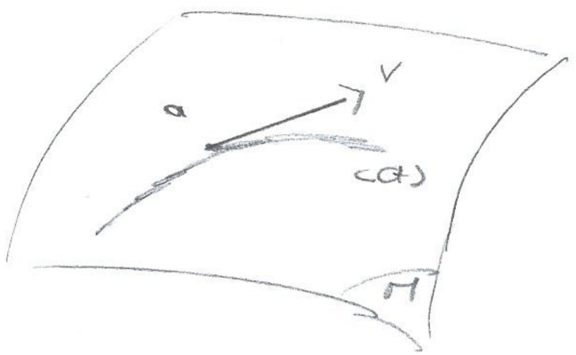
Dev 2 :

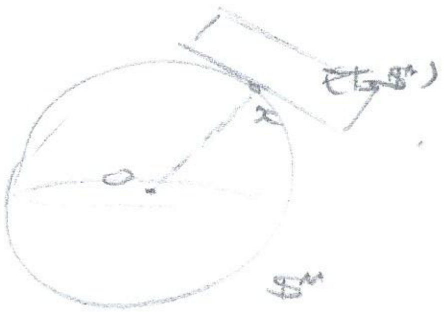
<u>Appli</u> : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dim n^2-1 Rou
Via la différentielle du déterminant en $X \in GL_n(\mathbb{R})$
qui est $H \mapsto Tr(X^{-1}H)$, on obtient
$T_X SL_n(\mathbb{R}) = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ Tr(X^{-1}H) = 0\}$

<u>Ex</u> : $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ Rou
L'espace tangent en I_n à $O_n(\mathbb{R})$ est $A_n(\mathbb{R})$.

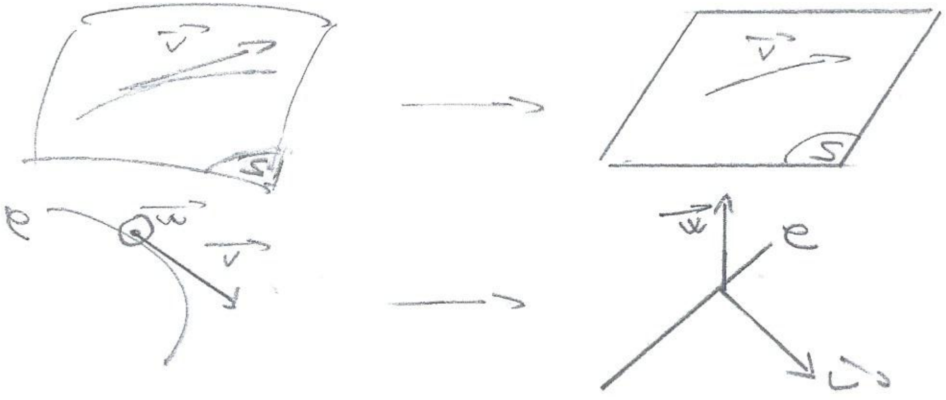
3) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$

Projections stéréographiques ?

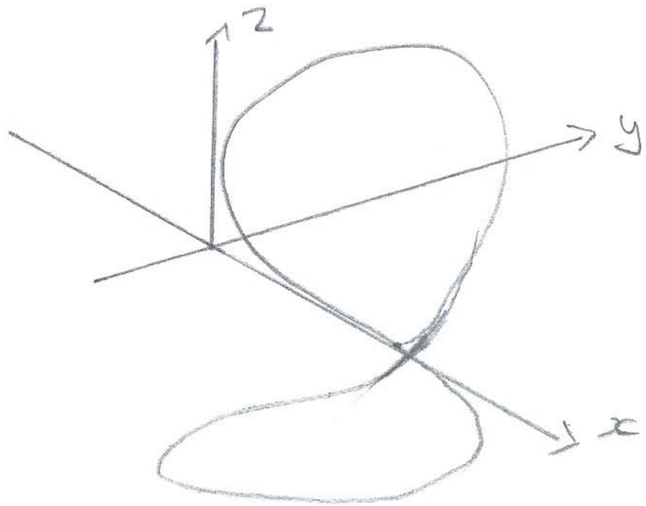




Dans $\mathbb{R}^3$:



Fenêtre de Viviani



Rmq : 2/ ⟹ 3/ Th des fcts implicites
4/ ⟹ 3/ Th d'inversion locale

Références

[Rou] ROUVIERE

[Laf] Jacques LAFONTAINE
Introduction aux variétés différentielles

[Gou] GOURDON Analyse

[ObjM] objectif Agrégation

[GD] Géométrie différentielle – avec 80 figures

Rev 1 : GOURDON

Rev 2 : GONNORD & TOSEL
Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation
calcul différentiel