Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

I Théorème du point fixe : conséquences et premiers exemples

Déf : Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit point fixe d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si $f(x) = x$

Ppté : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue, alors toute limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$ doit être point fixe de f.

Th du point fixe : Soit (E, d) un espace complet. Soit $f : E \to E$ une application contractante. Alors :

- f admet un unique point fixe.
- $\forall x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme initial x_0 définie par l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $\bar{x}$.

Rq : La convergence est linéaire si $\exists c < 1$ tel que $\forall n$ $|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c\,|x_n - \bar{x}|$

Ex : Soit $f\begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{1+x} \end{pmatrix}$ qui est contractante.
Alors la suite $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \end{cases}$ converge vers le point fixe de f qui est le nombre d'or.

On suppose pour la fin du paragraphe $f : I \to I$ où I intervalle fermé de $\mathbb{R}$, f de classe $\mathcal{C}^1$ et de point fixe $\bar{x}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf par $x_{n+1} = f(x_n)$ $x_0 \in I$

Déf : On dit que $\bar{x}$ est un point fixe :
- attractif si $|f'(\bar{x})| < 1$
la méthode du point fixe s'applique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$

En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f'(\bar{x}) = 0$, on parle de point superattractif ou la convergence est quadratique
- répulsif si $|f'(\bar{x})| > 1$: il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que $\forall x \in V$, $|f(x) - \bar{x}| > |x - \bar{x}|$.

Rq : Si $|f'(\bar{x})| = 1$, on ne peut rien dire : c'est le cas douteux.
Ces phénomènes s'observent graphiquement :
si $f'(\bar{x}) < 0$, on obtient des graphes "en escargot."

Ex : 1) $f_1\begin{pmatrix} [\frac{1}{2}, 1] \to [\frac{1}{2}, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{pmatrix}$
Le point $\bar{x}$ est attractif (cf annexe 1)

2) $f_2\begin{pmatrix} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto x^2 \end{pmatrix}$
Le point $\bar{x} = 0$ est répulsif et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si $x_0 \neq 0$

II Le cas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I intervalle de $\mathbb{R}$
On supposera toujours f continue : ainsi, l'étude des points fixes de f permet de déterminer les limites potentielles de f tandis qu'une étude graphique permet de conjecturer le phénomène de convergence.
Il faut vérifier la convergence de la suite.

1) Les exemples généraux

- Suites arithmético-géométriques :

Pour a, b deux réels fixés, soit $f\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax+b \end{pmatrix}$
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de 1er terme x_0 et tq $x_{n+1} = f(x_n)$

$\Rightarrow$ Si $a = 0$, la suite est stationnaire au rang 1.
$\Rightarrow$ Si $a = 1$, on retrouve la suite arithmétique de raison b qui diverge en $+\infty$ sauf si $b = 0$ (auquel elle est stationnaire en x_0)
$\Rightarrow$ Si $|a| < 1$, il y a convergence pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ de la suite vers $\frac{b}{1-a}$ le pt fixe de f
$\Rightarrow$ Sinon, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sauf si $x_0 = \frac{b}{1-a}$ auquel cas elle est stationnaire.

Rq : En fait, on montre que $x_n = \alpha + a^n(x_0 - \alpha)$ où $\alpha = \frac{b}{1-a}$

Rq. Si $b = 0$, on retrouve les suites géométriques.

• Si la fonction f est monotone

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de premier terme $x_0 \in \mathbb{R}$ déf par $f(x_n) = x_{n+1}$.

- Supposons f croissante :
Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (croissante si $x_1 \geq x_0$, décroissante si $x_1 \leq x_0$).
Un travail de majoration/minoration permet d'assurer la convergence.

- Supposons f décroissante.
Alors la fonction $f\circ f$ est croissante. Cette fonction définit deux suites $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = f\circ f(u_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = x_1 \\ v_{n+1} = f\circ f(v_n) \end{cases}$

qui coïncident avec $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
La convergence est assurée si (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Ex : Si $f\left(\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{x+1}\end{array}\right)$, alors si $x_0 > 1$, la suite converge vers 1.

2) La méthode de Newton

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ tq $f'(x) > 0$ pour $x \in [a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$.
Soit $\bar{x}$ le zéro de f sur $[a,b]$ qu'on veut approcher.

Soit $g\left(\begin{array}{l}[a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}\end{array}\right)$: $\bar{x}$ est pt fixe de g.

On ramène l'étude du zéro de f à l'étude du point fixe de g

Prop : Il existe un voisinage V de $\bar{x}$ dans $[a,b]$ tel que $\forall x_0 \in V$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme initial x_0 et définie par l'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ converge de façon quadratique vers $\bar{x}$.

Interprétation graphique : La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se construit graphiquement : x_{n+1} est l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente de f en x_n.
(cf annexe 3)

Rq : La méthode n'est pas globale, il faut x_0 proche de $\bar{x}$.
Cependant, elle est globale si f est convexe.

Appli : Recherche de racines carrées. (ou ex. $\sqrt{3}$)
C'est le zéro de $f(x) = x^2 - 5$ et le point fixe de $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$
(cf annexe 3)

3) Un processus de branchement

III Le cas $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

1) Suites récurrentes linéaires d'ordre n

Déf : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre d s'il existe $a_1, \dots, a_d$ tel que $\forall n \geq d$, $x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_d x_{n-d}$

Propo : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre d définie comme précédemment.
Posons la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $X_n = \begin{pmatrix} x_{n+d-1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par l'itération
$X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

et de premier terme X_0.

Ex : La suite de Fibonacci
c'est la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$
et $\forall n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Références

MONIER MPSI
ROUVIERE
ROMBALDI
RAPPAZ & PICASSO