228

Continuité et dérivabilité des fonctions d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace métrique muni de la topologie induite par la distance $|\cdot|$ et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

I Généralités

1) Définitions et premières propriétés

Déf : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ie si :
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ ((x \in I,\ 0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon))$

f est continue sur I si elle est continue en tout point de I (notée $\mathcal{C}^0$)

Propo : f est continue en a si et ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telque $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Déf : Si f n'est pas continue en a, a est un point de discontinuité

Ex : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$

CEx : $x \mapsto \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0

Propo : Pour $\alpha \in \overline{I} \setminus I$ tq la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a une limite l en α, alors il existe un unique prolongement $\hat{f}$ à $I \cup \{\alpha\}$ continue en α de la fonction f.

Ex : $\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x)/x\end{array}\right)$ se prolonge en 0 en posant $f(0) = 1$

Prop : Notons $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I. $(\mathcal{C}^0(I), +, \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre et la composée de deux fonctions continues bien choisies est continue.

Déf : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour $x \in I\setminus\{a\}$ admet une limite finie en a.
Lorsqu'elle existe on la note $f'(a)$ et on l'appelle le nombre dérivée de f en a.

Th : Si f est dérivable en $a \in I$, f est continue en a

Déf : La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\{a \in I / f$ dérivable en $a\}$ par $f'(x) = \lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Déf : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable en tout point de I et que f' est continue sur I

Rq : On définit la classe $\mathcal{C}^n$ puis la classe $\mathcal{C}^\infty$ de manière analogue.

Propo : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^n(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^n$ sur I. $(\mathcal{C}^n(I), +, \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. (sous-algèbre de $\mathcal{C}^0$)
On a de plus des formules pour calculer $(f+g)^{(n)}$ et $(fg)^{(n)}$ ou $(f\circ g)^{(n)}$
citons la formule de Leibniz : si $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, $a \in I$:
$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)$$

Ex : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

CEx : $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
$x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ $x \neq 0$ et 0 en 0 est dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$

2) Théorèmes fondamentaux

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle

Rq : Si $\gamma \in (f(a), f(b))$; $[a,b] \subset I$, $\exists c \in [a,b]$ tq $f(c) = \gamma$.

Th de Darboux : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Rq : f' non nécessairement continue

Appli : Il existe des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ n'admettant pas de primitives

Th de Rolle : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telque $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, f dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$
Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$

Ex : $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$: $\exists c \in]-1,1[$ tq $f'(c) = 0$

Coro : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ de racines réelles distinctes $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ alors $\exists \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ tq $\mu_j \in]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$ $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$ et μ_j racine de P'.

Th des accroissements finis : Soit $a<b$, soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Rq : On a aussi l'inégalité des accroissements finis

Appli : f croissante sur $[a,b] \iff f' \geq 0$ sur $[a,b]$

Appli – Règle de l'Hôpital : Soient f, g éléments de $\mathcal{C}([a,b])$ dérivables sur $I \setminus \{a\}$, où $a \in I$, I intervalle, tq $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{a\}$.
Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$

Formule de Taylor-Lagrange : Soient $a<b$, $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Rq : De même, f vérifie les autres formules de Taylor.

3) Résultats issus du lemme de Baire

Lemme de Baire : Toute intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Rq : Découle de la complétude de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Déf : Un G_δ de $\mathbb{R}$ est une intersection dénombrable d'ouverts

Prop : L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un G_δ.

DEV 1 – Densité des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivables

L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivable est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$

Rq : Pourtant, en exhiber une est dur !

Ex : Soit $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1 périodique tq pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\Delta(x) = |x|$
Alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \Delta(4^n x)$
est continue sur $\mathbb{R}$, nulle part dérivable (cf annexe)
(fonction de MacCarthy)

II Exemples et contre-exemples

1) Fonctions monotones, fonctions convexes

Ppté : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction monotone sur I. Rom
L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

C-Ex $f\left(\begin{array}{l} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1/E[\frac{1}{x}] & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}\right)$ est croissante avec une infinité de points de discontinuité. Rom

Rq : Monotone $\Rightarrow \mathcal{C}^0$

Rq – Inversement, la continuité n'implique pas la monotonie

C-Ex : La fonction de MacCarthy est monotone sur aucun intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$. Hau

Ppté : Si f est monotone, alors f est dérivable λ-pp. ? Rom

Ppté : Soit I intervalle non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$
Alors f est convexe.

Rq : Conséquence de Rolle.

Ppté : Les discontinuités de f' sont en nombre dénombrable.

Rq : Convexité $\not\Rightarrow$ continuité !

C-Ex : $f\left(\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x=0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases} \end{array}\right)$ est convexe mais discontinue en 0 Hau

2) Suites et séries de fonctions

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I)^{\mathbb{N}}$

Prop : Si $f_n \xrightarrow{U} f$, alors f est continue sur I.

C-Ex : $f_n\left(\begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $f_n \xrightarrow{S} f$ Hau
où $f\left(\begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases} \end{array}\right)$ discontinue en 1

Prop : Si $\sum f_n \xrightarrow{U} F$, alors F est continue sur I

C-Ex : $f_n\left(\begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1-x)x^n \end{array}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $F\left(\begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x=1 \\ 1 & x \neq 1 \end{cases} \end{array}\right)$
Alors $\sum_{n \geq 0} f_n \xrightarrow{S} F$ mais F discontinue en 1. Hau

Prop : Soit $(f_n) \subset \mathcal{C}^0(I)$ dérivable sur I telque
- f_n converge simplement vers f
- f'_n converge uniformément vers g

Alors f est dérivable sur I et $f' = g$

CEx : $f_n\left(\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\end{array}\right)$ cv uniformément vers $f\left(\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|\end{array}\right)$

Pourtant, $f'_n(x) = \frac{x}{f_n(x)}$ et $(f'_n) \longrightarrow g$ où $g\left(\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}\end{array}\right)$

et $f' \neq g$.

Rq : On a un résultat analogue pour les séries de fonctions.

Th de Dini : Soit $a<b$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0([a,b])$ tq $f_n \xrightarrow{S} f \in \mathcal{C}^0(I)$

1/ Si (f_n) croissante, alors $f_n \xrightarrow{U} f$

2/ Si f_n croissante $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $f_n \xrightarrow{U} f$.

Rq : Réciproque partielle aux props précédentes.

DEV 2 — Théorème de Borel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels quelconque
Alors il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telque
$\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = a_n$

Th d'Ascoli ?
Th de Weierstrass ?

3) En intégration.

Prop : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I)$
Alors $\forall a \in I$, $F_a\left(\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt\end{array}\right)$ est une fonction bien définie et dérivable sur I tq F_a primitive de f

Prop : Soit $g \in \mathcal{C}^1(I)$. Alors $\forall a \in I$, $\forall b \in I$,
$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(x)\,dx$$

Rq : g dérivable sur I ne suffit pas !

CEx : Fonction de Lebesgue (cf annexe).
C'est la limite uniforme f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x 1\!\!1_{A_n}(t)\,dt$ où (A_n) la suite d'ensemble $A_{n+1} = \frac{A_n}{3} \cup \frac{2+A_n}{3}$ où $A_0 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$

Alors f continue sur $[0,1]$, dérivable p.p avec $f' = 0$ mais $f(1) - f(0) = 1$.

Th de continuité sous le signe intégral : Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ mes. de Lebesgue
Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $X \subset \mathbb{R}$. Soit $F(x) = \int_I f(x,t)\,d\lambda(t)$ pour $x \in X$. On suppose que :
- $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue
- $\forall x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable
- $\forall t \in I, \forall x \in X$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ où φ fct ≥ 0 intégrable

Alors F est bien définie et est continue sur X.

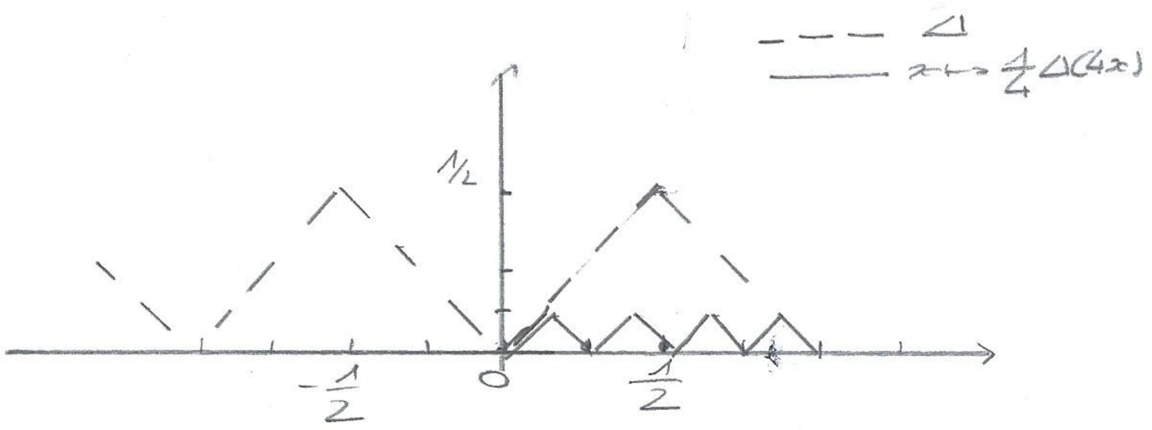
Rq : On peut avoir un énoncé local.

Prop : On a un énoncé analogue pour la classe $\mathcal{C}^1$ en supposant $\forall t$, $x \mapsto f(x,t)$ $\mathcal{C}^1$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$

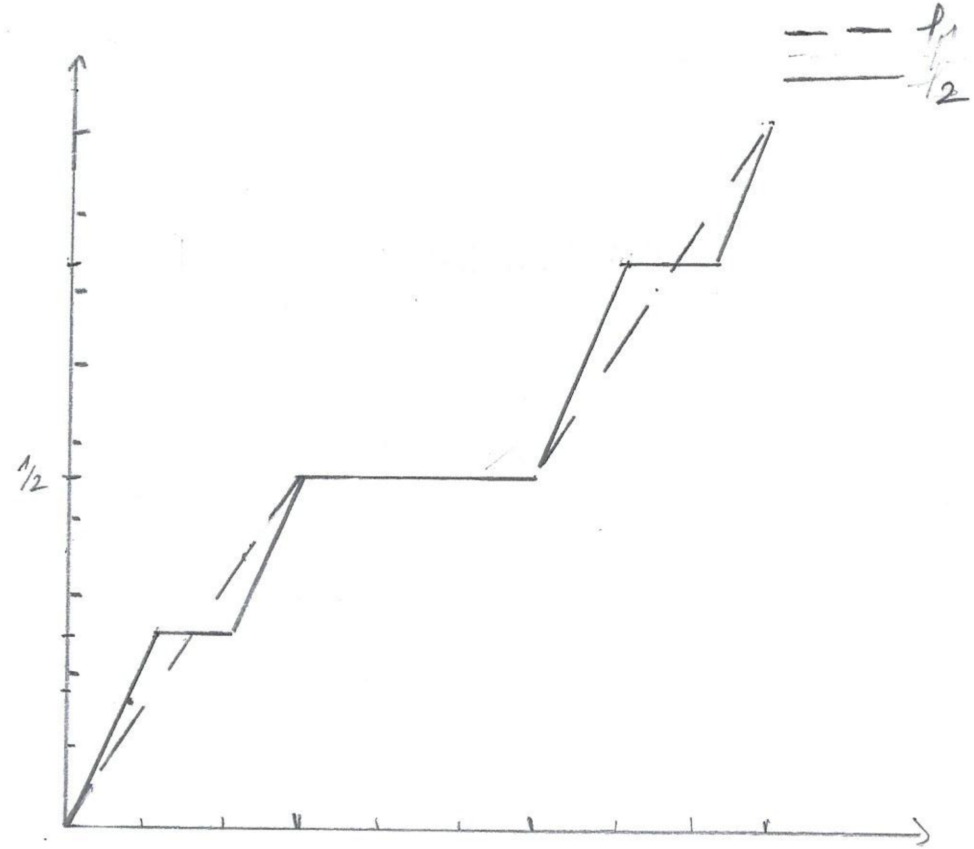
Rq : L'énoncé ne peut être local (cf des accfinis)

CEx : $f\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto x e^{-xt}\end{array}\right)$

Alors $F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ discontinue en 0.



<u>Schéma 1</u>



<u>Schéma 2</u>

) Connexité ⟷ TVI
Compacité ⟷ th de Rolle

) Les trucs horribles se construisent avec des limites !

<u>Références</u>

[Rom] J.-E. ROMBALDI
<u>Éléments d'analyse réelle</u> - CAPES et Agreg

[Gou] GOURDON - Analyse

[Hau] HAUCHECORNE

[B-P] BRIANE - PAGES

<u>Dev 1</u> :

<u>Dev 2</u> : ZUILY-QUEFFELEC (2007 p. 297)
ROUVIÈRE (p. 346)