229

Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

I Généralités

1) Fonctions monotones et leurs propriétés

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Déf : La fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si : $\forall (x,y) \in I^2$, $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$
(resp. : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)

La fonction f est décroissante sur I si : $\forall (x,y) \in I^2$, $x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$.

Déf : La fonction f est dite monotone sur I s'il est croissante sur I ou décroissante sur I.

Ppté : La composition de deux fonctions monotones est monotone mais pas le produit.

Prop : Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Alors f est monotone ssi f' de signe constant sur I.

Prop : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f continue et monotone.
Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Th de Dini : Soit (f_n) une suite de fonctions croissante définie sur un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers f où f continue. Alors la cv est uniforme.

Ex : 1) $\exp\left(\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*\\ x \mapsto e^x\end{array}\right)$ est strictement croissante

2) La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ croissante.

2) Fonctions convexes et leurs propriétés

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Rou

Déf : La fonction f est convexe (resp. strictement convexe) sur I si : $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$
(resp. $f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$)

La fonction f est concave si $-f$ est convexe.

Prop. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Il est équivalent de dire : Gou
- f est convexe
- L'épigraphe de f $\{(x,t) \in I \times \mathbb{R} \mid t \ge f(x)\}$ est convexe dans $\mathbb{R}^2$
- $\forall x_0 \in I$, la fonction $g_{x_0}\left(\begin{array}{l}I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{array}\right)$ est croissante

Coro : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et si $a < b < c$ sont trois élts de $\mathbb{R}$ Gou
alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Cela se traduit graphiquement (annexe)

Rq : La déf se résume que si $A \in \mathcal{G}(f)$, $B \in \mathcal{G}(f)$, $[AB]$ est au dessus du graphe de f sur $[A,B]$. Gou

Prop : Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I
Alors f est convexe ssi $f''(x) \ge 0$ $\forall x \in I$

Prop : Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
Alors f est convexe ssi f' est croissante
ssi la courbe de f est au dessus de ses tangentes

Ppté : Le produit et la composée de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexes. Rou
Cependant si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante alors $f \circ g$ est convexe.

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est logarithmiquement convexe ou log convexe si $\ln(f)$ est une fonction convexe.

Ex : 1) $\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \ln(x)\end{array}\right)$ est concave
2) $\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^p\end{array}\right)$ où $p \in [1,+\infty[$ est convexe
3) La fonction Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+$

II Régularité des fonctions monotones ou convexes

1) Cas des fonctions monotones

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$

Prop : Supposons f croissante sur I.
Alors f admet une limite à gauche et à droite en tout point de I
et de plus, $\forall x_0 \in I$, $f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) =: f(x_0^+)$

et $\forall (x,y) \in I^2, x < y$, $f(x^+) \leq f(y^-)$

Prop : Soit f une fonction monotone sur I. L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
Rq : En fait, f monotone superflu mais permet une démo directe car pas de densité.
Rq : monotonie et continuité ne s'impliquent pas.
Ex : $f\left(\begin{array}{l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/E(\frac{1}{x}) \end{array}\right)$ est croissante mais avec une infinité de pts de discontinuité.

Prop : Si f est une fonction monotone sur I telle que $f(I)$ soit un intervalle, alors f est continue sur I.

2) Cas des fonctions convexes

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$

Prop : Supposons f convexe sur I
Alors f admet une dérivée à gauche et à droite en tt point de I
et de plus, $\forall x_0 \in I$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0^-)$ et $f'(x_0^+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$
alors les fonctions $f'_- : x \mapsto f'(x^-)$ et $f'_+ : x \mapsto f'(x^+)$ sont croissantes et $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y$,

$$f'(x^-) \leq f'(x^+) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y^-) \leq f'(y^+)$$

Coro : Une fonction convexe sur I est continue sur I (I supposé ouvert).
Rq : car dérivable à g et à d $\Rightarrow$ C^0 à g et à d d'où le C^0.

Rq : Lorsque I n'est plus ouvert la continuité n'est pas assurée au bord de f.
Ex : $f\left(\begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \end{array} \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ x & \text{sinon} \end{cases}\right)$ Cf dessin en annexe

Prop : Une fonction convexe et dérivable de I sur $\mathbb{R}$ est de classe C^1.

III Exemples et applications

1) Comparaison série-intégrales

Prop : Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors :
– si f croissante, si $0 \leq n \leq m$, $\int_n^m f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \leq \int_{n+1}^{m+1} f(t)dt$
– si f décroissante, si $0 \leq n \leq m$ $\int_n^m f(t)dt \geq \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \geq \int_{n+1}^{m+1} f(t)dt$

Coro : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.
Alors $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et ssi f est intégrable.
De plus, $\forall n \geq n_0$, $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$

2) Inégalités de convexité

Inégalité arithmético-géométrique : Soient $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$
Alors $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$
Rq : Résulte de la concavité du logarithme.

Inégalité de Hölder : Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Soient $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$
Rq : On reconnait l'inégalité de Cauchy-Schwarz qd $p = q = 2$

Inégalité de Minkowski : Soit $p \in [1, +\infty[$ et soient $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}$$

4) Processus de branchements

5) ~~Gradient~~ à pas optimal.

Rq : Sous forme intégrale, cette inégalité assure que les $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ sont des evn pour $p \in [1, +\infty[$

P **Inégalité de Jensen** : Soit $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de proba. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ convexe. Alors pour toute fonction f intégrable,

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mathbb{P}\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mathbb{P}$$

Faire l'analogue via la régularité

(1) Ouvert pour éviter les problèmes au bord
(non existence de lim à → et à ←)

Références

[GOU] GOURDON *Analyse*
[ROM] ROMBALDI *Éléments d'analyse réelle*
[MON] MONIER *Analyse MP*
[B-P] BRIANE-PAGES