Séries de réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

1) Définitions

Déf : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = u_0 + \dots + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, notée $\sum_{n\geq 0} u_n$.
L'élément u_n est le n-ième terme de la série.
L'élément S_n est la n-ième somme partielle de la série.

Déf : La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente ssi la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (complément). Dans ce cas, on appelle somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ cette limite, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Dans le cas contraire, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite divergente.
L'élément $R_n := \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le n-ième reste de la série si $\sum u_n$ cv, $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Propo : Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \longrightarrow 0$

Rq : La réciproque est fausse : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ ne converge pas.
On parle de divergence grossière lorsque $u_n \not\to 0$

Déf : La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente ssi $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Propté : $\sum_{n\geq 0} u_n$ abs convergente $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ convergente ($\mathbb{K}$ complet)

Rq : La réciproque est fausse : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$ cv mais pas abs cv

Rq : Rend l'étude du cas $u_n \geq 0$ très intéressante !

Propté : Les fonctions abs conv forment un sev sur le $\mathbb{K}$-ev des séries.

Ex : Si $|q|<1$, $q \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge (on peut calculer facilement S_n et R_n)

Lemme : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $\sum u_n$ converge $\iff \exists M\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq M$ (2)

2) Comparaison des séries

Propo : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

1) Si $\left| \begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ \sum v_n \text{ cv} \end{array} \right.$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ — Ou 1 : R_n restes

2) Si $\left| \begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ \sum u_n \text{ dv} \end{array} \right.$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ — Ou 1 : S_n s. partielles

Rq : Même énoncé avec les O — $R_n = S_n^{-1}$

Propo : Soient (u_n) et (v_n) éléments de $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Supposons $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

1) Si $\sum u_n$ cv, alors $\sum v_n$ converge
2) Si $\sum u_n$ dv, alors $\sum v_n$ converge

Rq : Étude du cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réel non trivial !

II Étude des séries

1) Cas des séries à termes positifs

D'après ce qui précède, il suffit de pouvoir comparer un à un terme positif d'une série bien choisie

1) **Série de Riemann** : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

- La série converge ssi $\alpha > 1$

Test en n^α : Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$
Si $\exists \alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$, alors $\sum u_n$ converge.

Ex : Pour $u_n = e^{-\ln(n)^\alpha}$, $\sum u_n$ converge si et ssi $\alpha > 1$

2) **Séries géométriques** : $\sum_{n\geq 0} q^n$ pour $q \in \mathbb{C}$

- La série converge ssi $|q| < 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Règle de d'Alembert : Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$
On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite $l \in \mathbb{R}_+$

1) Si $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge
2) Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge

Rq : Si $l = 1$, on ne sait pas : cf $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$!

Ex : $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$ converge

Règle de Cauchy : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}_+$

1) Si $l<1$, alors $\sum u_n$ converge
2) Si $l>1$, alors $\sum u_n$ diverge

Ex : $\sum \left(\frac{n+e}{3n+\pi}\right)^n$ converge.

2) Cas général

o) Etudier la cv absolue (cf II-1)

1) Cas des séries spéciales alternées

Th : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tq $\sum u_n$ est spéciale alternée ie :
- $\sum u_n$ est alternée : $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs tq $u_n = (-1)^n a_n$
- $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- a_n décroissante.

Alors $\sum u_n$ converge et $\forall n, |R_n| \leq a_{n+1}$

Ex : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n-1}\ln(n)}{n}$ converge

2) Comparaison série + intégrale.

Th 1 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, décroissante.
Alors $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ont même nature.
Si f est intégrable, on a alors $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$

$\int_1^{N} \leq S_N \leq \int^{N+1}$

Rq : Récoudre du schéma en annexe.

Th 2 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$ une fonction C^1 telle que f et f' soient intégrables. Soit $w_n = \int_{n-1}^{n} f(x)dx - f(n)$. Alors
1) $\sum w_n$ est absolument convergente
2) $\sum f(n)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \int_0^{+\infty} f(x)dx - \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

3) Transformation d'Abel

Idée : IPP sur les séries. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Def : Soit $\sum_{n\geq} u_n$ une série tq $u_n = a_n v_n$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. On parle de transformation d'Abel sur $\sum u_n$ qd

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})S_k + a_n S_n$$

Th - Règle d'Abel : Soit $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tq $u_n = a_n v_n$ avec
- $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, a_n décroissante et $a_n \to 0$
- la série $\sum v_n$ est bornée

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Rq : On retrouve le critère des $\sum$ sp alt

Ex : $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ converge

3) Produit de Cauchy et série commutativement convergente

Def/Prop : Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes de $\mathbb{K}$.
Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série $\sum w_n$ où w_n est déf par $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ pour tout n.

Th : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy est absolument convergent et sa somme vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$

Th de Fubini pour les doubles sommes : Soit $(u_{p,q})$ suite indexée par $\mathbb{N}^2$ à valeur dans $\mathbb{C}$. Il est équivalent de dire
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q\geq 0} u_{p,q}$ est abs cv et $\sum (\sum_{q\geq 0}^{+\infty} |u_{p,q}|)$ cv
- $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p\geq 0} u_{p,q}$ est abs cv et $\sum_{q\geq 0} (\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|)$ cv

Dans ce cas, les séries $\sum_{p\geq 0} (\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$ et $\sum_{q\geq 0} (\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q})$ sont abs cv et $\sum_{q=0}^{+\infty} (\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{p=0}^{+\infty} (\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$

Ex : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$

Def : Une série $\sum u_n$ ($n \in \mathbb{N}$) est commutativement convergente si $\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge.

$\nrightarrow$ Rq : commutativement convergence $\Rightarrow$ converge

Prop : $\sum u_n$ abs cv $\Leftrightarrow$ $\sum u_n$ commut cv et $\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$

Ex : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ne cv pas commutativement.

Th de Riemann : Soit $\sum u_n$ où $u_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum u_n$ cv mais pas abs.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijectif tq $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge vers x.

Rq : (ou le critère d'Abel)

III Exemples et applications

1) Séries entières

Déf : Une série entière est une série de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ du type $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ et où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Lemme d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $(a_n r^n)$ est bornée, où $r > 0$. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rq : ceci permet de définir le rayon de convergence d'une s.e.

Règle de d'Alembert pour les séries entières : Soit $\sum a_n z^n$ une s.e.

- Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ alors le ray de convergence R de cette série entière est $R = 1/l$ (avec $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$)
- Si $\sqrt[n]{a_n} \to l$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ alors le ray de cv R est $R = 1/l$, c'est la lemme d'Alembert.

Déf : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de ray R_a et R_b. Alors le produit de Cauchy de ces deux séries est la série entière $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et son ray de cv est $R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et de somme $(\sum\ )(\sum\ )$ sur son disque de convergence.

2) Exemples en probabilités

Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité (pour le suite) Soit (A_n) une suite d'évènement tel que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$

Alors $\mathbb{P}(\limsup (A_n)) = 0$

ie il n'y a qu'un nombre fini d'entre eux qui se réalisent simultanément.

Cor. : Soit (A_n) une suite d'évènement indépendants tq. $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$

Alors $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$

Appli - Loi 0/1 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

On déf la tribu asymptotique $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n\geq 1}^{\infty} \sigma(\bigcup_{p\geq n} \sigma(X_p)))$

Supposons X_n indépendantes et soit $A \in \mathcal{A}_\infty$

Alors soit $\mathbb{P}(A) = 0$ soit $\mathbb{P}(A) = 1$

Ex :

Déf : Soit X une va discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

On appelle série génératrice des moments la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k$ pour $|z| < 1$.

P, 10 : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) k$

Rq1 : Équivalent par une série géométrique

Rq2 : Découle des règles connues !

Possible

EVN

Espaces $\ell^q(\mathbb{K})$ $q = 1, 2$?)

Espaces $\mathcal{L}_c(E)$, E de Banach

Intérêts de la démo ?

si $|||a||| < 1$ $\Longrightarrow$ a inversible

Exemples

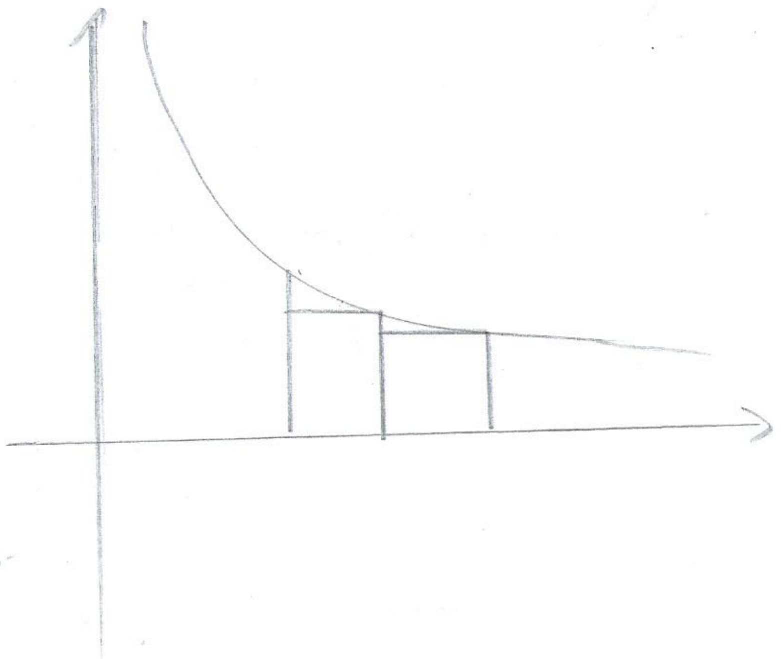
$\int$ de Riemann

Th (CRDU) — dév. asympt., Stirling

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum \frac{1}{p} = +\infty$

Séries de Bertrand

Annexe



Références

[Mon] Jean-Marie MONIER – Analyse MP

[Gou] Xavier GOURDON – Analyse

[Hau] Bertrand HAUCHECORNE Les contre-exemples en mathématiques

[J-P] JACOD – PROTTER – L'essentiel en théorie des probabilités