232

Méthode d'approximation des solution d'une équation $f(x)=0$. Exemples

I Généralités

1) Position du problème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une fonction continue.
On cherche à calculer numériquement un ou plusieurs zéros de f i.e. les solutions de $f(x)=0$.
Le principe des méthodes itératives est le suivant
→ localiser grossièrement le ou les zéros de f (graphiquement par exemple); soit x_0 un zéro grossier.
→ construire à partir de x_0 une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ où $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ vérif $f(\bar{x})=0$.
Dans ce cas la méthode est dite convergente.

Les méthodes convergent "plus ou moins rapidement"; précisons cette notion.

Df : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une méthode convergente est d'ordre p s'il existe $C<1$ telle que $\forall n$ $|\bar{x}-x_{n+1}| \leq C|\bar{x}-x_n|^p$

Si $p=1$ la convergence est dite linéaire
Si $p=2$, la convergence est dite quadratique
Si $p=3$, la convergence est dite cubique.

2) Méthodes de point fixe.

Df : Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit point fixe de $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si $g(x)=x$

Th du point fixe : Soit (E,d) un espace complet
Soit $F : E \to E$ une application contractante i.e. $\exists k<1$
$\forall (x,y) \in E$, $d(F(x),F(y)) \leq k\, d(x,y)$.
Alors F admet un unique point fixe $\bar{x} \in E$.
De plus la suite (x_n) définie, pour tout $a \in E$, par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers a et la convergence est linéaire.

Coro : Soit $g : I \to \mathbb{R}$ où I intervalle fermé de $\mathbb{R}$
Si $f(I) \subseteq I$ et si f est contractante, alors le théorème précédent peut s'appliquer.

Idée des méthodes de point fixe.

On transforme le problème $f(x)=0$ en un problème équivalent du type $g(x)=x$
On cherche ensuite à appliquer le théorème précédent et à partir d'un x_0 bien choisi, construire la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ qui converge vers les zéros de f.

Dans la fin de ce paragraphe, soit $g : I \to I$ intervalle fermé de classe $\mathcal{C}^1$ et $\bar{x}$, un point fixe de g
Quel est le comportement de g autour de $\bar{x}$?

Df : On dit que $\bar{x}$ est un point fixe :
- attractif si $|g'(\bar{x})|<1$: la méthode du point fixe s'y applique et converge linéairement
En particulier, si $g'(\bar{x})=0$ et g de classe $\mathcal{C}^2$, on parle de point super attractif car il y a convergence quadratique
- répulsif si $|g'(\bar{x})|>1$: il existe V un voisinage de $\bar{x}$ tq $\forall x \in V$, $|g(x)-\bar{x}| > |x-\bar{x}|$

Rq : Si $|g'(\bar{x})|=1$, on peut rien dire, c'est le cas douteux

Rq : On observe graphiquement ces phénomènes

Ex : 1) $g\begin{pmatrix} [\frac{1}{2},1] \to [\frac{1}{2},1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{pmatrix}$
Le point $\bar{x}$ est attractif (cf annexe 1)
2) $g\begin{pmatrix} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto x^2 \end{pmatrix}$ le point 1 est répulsif (cf annexe 2)

Rq : Le phénomène d'attractivité ou de répulsivité en escargot se produit lorsque $g'(\bar{x}) < 0$.

3) Critère de convergence pour $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Soit $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle $\|\cdot\|$.

Déf : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de racines complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ forme le spectre de A noté $Sp(A)$
- Le rayon spectral de A est le réel noté $\rho(A)$ égal au maximum des $|\lambda_i|$: $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} (|\lambda|)$

Lemme : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il est équivalent de dire :

- $\rho(A) < 1$
- La suite $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = A x_n \end{cases}$, pour x_0 quelconque converge vers le vecteur nul.

II Méthode pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) Méthode par dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telque f soit continue et $f(a)f(b) < 0$.
Il y a donc au moins un zéro dans $[a, b]$.
On construit l'algorithme suivant :

- $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $a_0 = a$, $b_0 = b$

$\begin{cases} - \text{si } f(x_n)f(a_n) < 0, \text{ on pose } a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = x_n,\ x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \\ - \text{si } f(x_n)f(a_n) > 0 \quad a_{n+1} = x_n,\ b_{n+1} = b_n,\ x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \\ - \text{si } f(x_n) = 0, \text{ l'algorithme s'arrête.} \end{cases}$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure que la méthode converge.
Cependant, la vitesse est faible (d'où un grand nombre de perdant à la victoire du Juste Prix !)
cf annexe 3 pour un exemple.

2) La méthode de Newton

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telque sur $[a, b]$, $f'(x) > 0$ avec $f(a)f(b) < 0$
Soit $\bar{x}$ le zéro de f.
On pose $g \left(\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right)$

A partir d'une valeur x_0 bien choisie, la suite de terme initial x_0 et tq $x_{n+1} = g(x_n)$ va converger quadratiquement vers $\bar{x}$.

Interprétation graphique : A chaque étape, on construit x_{n+1} comme l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à f en x_n (cf annexe 4 pour l'exemple)

$\boxed{\text{DEV 1}}$ Méthode de Newton

Dans les conditions précédentes :

1) - Il existe un voisinage de $\bar{x}$ dans $[a, b]$ tel que $\forall x_0 \in V$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme initial x_0 définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge de façon quadratique vers $\bar{x}$

2) - on applique la méthode pour la recherche de racines carrées et on majore l'erreur commise

Rq : La méthode n'est pas globale : si le point x_0 est trop éloigné de $\bar{x}$, la méthode ne marche pas. Cependant, elle devient globale si f est convexe.

Ex : $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right)$. (cf annexe 4)
On constate graphiquement que la méthode peut échouer si on est trop loin de 1.

- Une variante : Méthode de la corde

Sous les mêmes conditions, on pose pour x_0 fixé
$\tilde{g} \left(\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} \end{array} \right)$

Propo : La méthode converge localement vers $\bar{x}$ en vitesse linéaire.

Intérêt de la méthode : On perd en vitesse mais on gagne en rapidité de calcul : à chaque étape, on n'a plus à calculer $f'(x_n)$.

Interprétation graphique : Comme pour la méthode de Newton sauf qu'on prend comme droite la droite passant par x_n et de pente $f'(x_0)$. (cf annexe 5)

III Méthode pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1) Méthode de Newton-Raphson

C'est la généralisation de la méthode de Newton aux fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que pour un zéro $\bar{x}$, la différentielle de f en $\bar{x}$ notée $d_{\bar{x}}f$ ($\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$) est inversible.

On pose $g \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto x - (d_x f)^{-1}(f(x)) \end{array} \right)$

Prop : La méthode de Newton-Raphson est la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ g(x_n) = x_{n+1} \end{cases}$

Sur un voisinage V de $\bar{x}$, si $x_0 \in V$, la méthode de Newton-Raphson converge quadratiquement vers $\bar{x}$ sous ces hypothèses.

Rq : La méthode de la corde s'applique encore et permet un gain conséquent dans les calculs (inverser $d_{x_n}f$ est dur !)

2) Méthode de Gauss-Seidel

Ces méthodes s'appliquent lorsque f est linéaire.
En particulier, elles s'appliquent aux résolutions de systèmes linéaires.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: soit le système $AX = B$

Il y a une unique solution $\bar{X}$ à ce système.
Le pivot de Gauss permet de la calculer explicitement mais coûte cher en calcul.

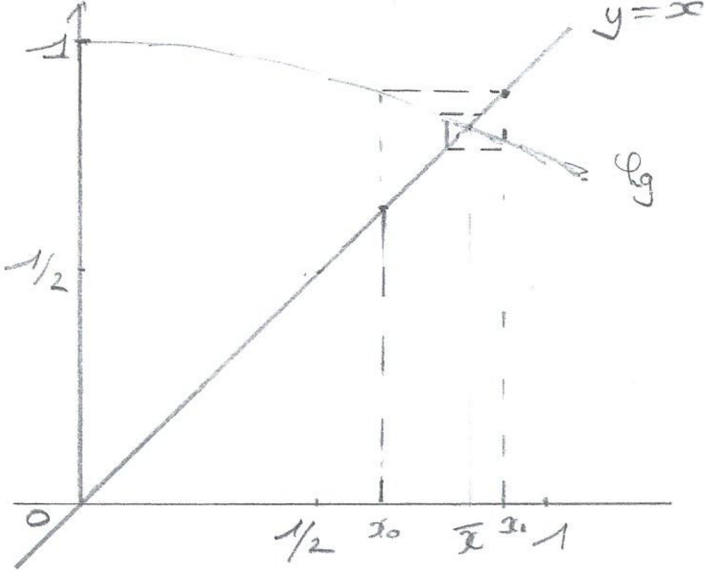
On écrit $A = M - N$ où $M \in GL_n(\mathbb{R})$ de forme "agréable".
On se ramène au problème de point fixe
$X = M^{-1}NX + M^{-1}B$

On définit la suite, pour $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$: $\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ X^{(n+1)} = M^{-1}NX^{(n)} + M^{-1}B \end{cases}$

Lemme : Il est équivalent de dire :
- la suite $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{X}$ pour tout $X^0 \in \mathbb{R}^n$
- $\rho(M^{-1}N) < 1$

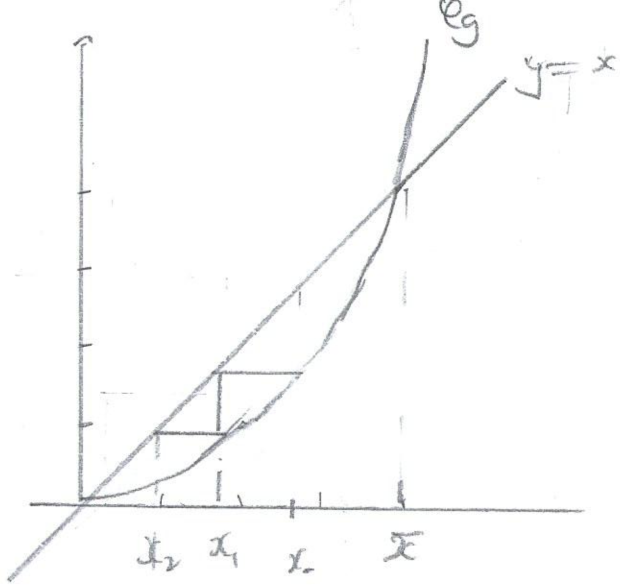
Def : Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est strictement dominante si $\forall i \in [\![1, n]\!]$

Énoncé DEV 2 : Th de Gauss-Seidel

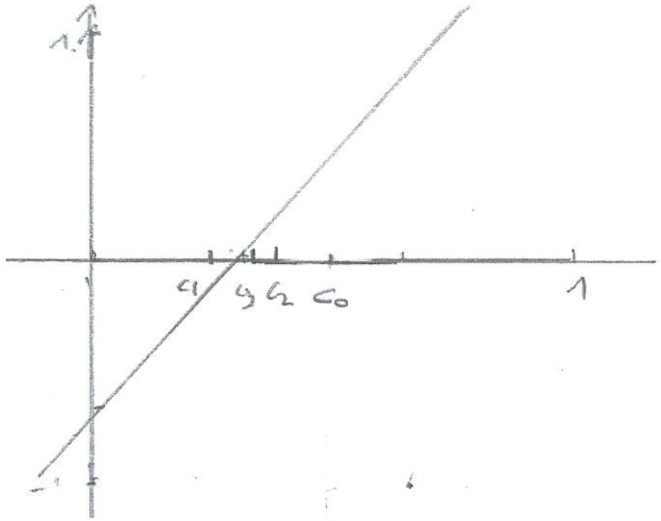


Rq : phénomène du graphe en escargot car $\varphi'(x) < 0$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

Annexe 1

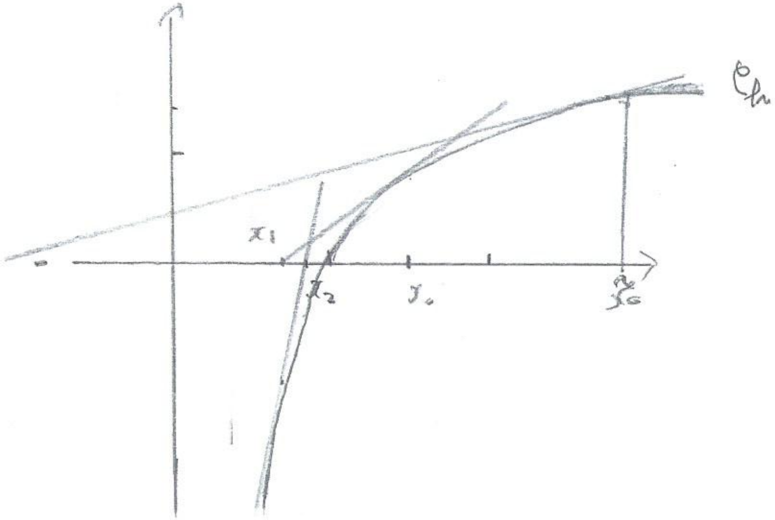


Annexe 2

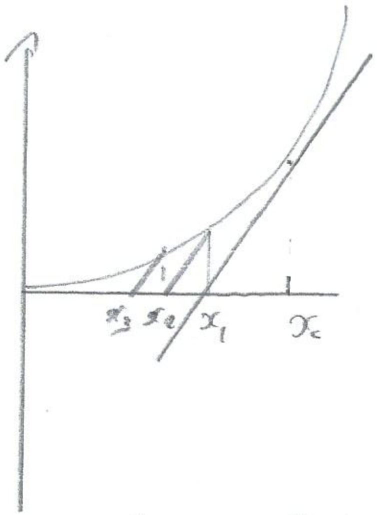


J'ai, $f : x \mapsto -\frac{2}{3} + 2x$

Annexe 3



Annexe 4



Annexe 3

Références

[Rom] DEMAILLY

[Rap] RAPPAZ & PICASSO
Introduction à l'analyse numérique

[Rom] ROMBALDI
Analyse matricielle. Cours et exos

[Rou] ROUVIERE