Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Généralités

1) Définitions

Df : Soit $p \geq 1$, on définit :

- $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mu) = \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable $\mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$

C'est un sev de l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$

- pour toute fonction de X dans $\mathbb{K}$, la norme $\mathcal{L}^p$ de f par $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \in [0, +\infty]$

C'est une semi-norme de $\mathcal{L}^p(\mu)$.

- la relation d'équivalence $\sim_p$ sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ définie par

$f \sim_p g \iff \|f - g\|_p = 0$

- l'espace quotient $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim_p$ est noté $L^p(\mu)$

C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par $\|\cdot\|_p$

Les représentants seront donnés simplement f (et non $\bar{f}$)

Df : On définit :

- le supremum essentiel d'une fonction de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{K}$ $\|f\|_\infty$ par $\|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 \mid \mu(\{ |f| > M \}) = 0 \} \in [0, +\infty]$

- $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \mid \|f\|_\infty < +\infty \}$ l'ensemble des fonctions μ-essentiellement bornées.

C'est un $\mathbb{K}$-ev semi-normé.

- L'espace quotient $\mathcal{L}^\infty(\mu)/\sim_\infty$ (où $\sim_\infty$ est la rel d'équivalence avec $\|\cdot\|_\infty$) est noté $L^\infty(\mu)$

C'est un $\mathbb{K}$-evn pour $\|\cdot\|_\infty$

2) Inégalités et convergences dans $L^p(\mu)$

Inégalité d'Hölder : Soit $(p, q) \in [1, +\infty]^2$ conjugués (ie tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et soient $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$

Alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Rq : Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Minkowski : Pour $p \in [1, +\infty[$, et f, g éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$, $\|f + g\|_p \leq \|f\| + \|g\|_p$

Rq : Assure que $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme.

Prop : Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de $L^p(\mu)$ et f quelconque si $p \in [1, +\infty[$

- Si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ et $f \in L^p(\mu)$ alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et une fonction $g \in L^p(\mu)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_{\varphi(n)}| \leq g$ μ-pp et $f_{\varphi(n)}$ converge μ-pp vers f ($f \xrightarrow{\mu\text{-pp}} f$)
- Si $f_n \xrightarrow{\mu\text{-pp}} f$ et si $\sup_n(\|f_n\|_p) < +\infty$ et s'il existe $g \in L^p(\mu)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ-pp, alors $f \in L^p(\mu)$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$

Rq : La bosse glissante $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,1]}(x + n)$ converge μ-pp vers $f \equiv 0$ mais ne converge pas en norme $\|\cdot\|_p$.

DEV 1 — Théorème de Riesz-Fischer

> Les espaces $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1, +\infty]$ sont complets donc sont des espaces de Banach

Lemme : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}_+$ ~~positives~~

Alors $\forall p \in [1, +\infty[$, $\|\sum_{n \geq 1} f_n\|_p \leq \sum \|f_n\|_p \leq +\infty$

3) Autres propriétés des espaces L^p

Prop : Soit μ une mesure finie ($\mu(X) < +\infty$) :

Si $1 \leq p \leq q$, alors $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$

et $L^\infty(\mu) \subset L^p(\mu)$

Rq : Rien si $\mu(X) = +\infty$

Propo : Soit $p\in[1,+\infty[$ ... L'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$, $p<\infty$ et celui des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$.

Propo : Soit $p\in[1,+\infty[$

- L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\mu)$
- L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mu)$

Rq : Faux pour $L^\infty(\mu)$

Propo : Soient $(p,q)\in[1,+\infty[^2$ conjugués et μ finie.

- $\forall g\in L^q(\mu)$, $\Phi_g\left(\begin{array}{l} L^p(\mu)\to\mathbb{K}\\ f\mapsto\int_X fg\,d\mu\end{array}\right)$ est une forme linéaire continue de norme $\|g\|_q$.
- Soit $\Phi\in(L^p(\mathbb{R}))'$ où $(L^p(\mathbb{R}))'$ est le dual topologique ~~et supposons que $\forall f\in L^p(\mathbb{R}),\ \Phi(f)\geq 0$.~~

Alors $\exists!\, g\in L^q(\mu)$ tel que $\Phi=\Phi_g$

Ainsi $(L^p(\mu))'\simeq L^q(\mu)$ (dualité L^p-L^q)

Rq : Utilise le théorème de Radon-Nikodym) développer ?
En particulier, $(L^2(\mu))'\simeq L^2(\mu)$.
Le cas $p=1$ et $q=\infty$ ne marche bien

Propo : Soit μ une mesure finie et $1\leq p\leq q$
Alors $L^p(\mu)\cap L^q(\mu)$ est dense dans $L^p(\mu)$

II Utilisation des espaces $L^p(\mu)$

1) Convolution et transformée de Fourier

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ dans ce paragraphe et λ mesure de Lebesgue et $X=\mathbb{R}^n$, $\mu=\lambda_n$

Déf : Soient f et g deux fonctions boréliennes à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Le produit de convolution de f et g noté $f*g$ est la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$ lorsque $f*g$ a un sens

Propo : Soient $(p,q)\in[1,+\infty]$ conjuguées.
Si $f\in L^p(\lambda_n)$ et $g\in L^q(\lambda_n)$, le produit $f*g$ est bien défini sur $\mathbb{R}^n$.
De plus, $\|f*g\|_\infty\leq\|f\|_p\cdot\|g\|_q$

Rq : Grâce à l'inégalité de Hölder

Propo : Soient $(f,g)\in L^1(\lambda^n)$. Alors $f*g$ est définie pour λ-presque tout $x\in\mathbb{R}^n$ et $f*g\in L^1(\lambda^n)$ avec
$\|f*g\|_1\leq\|f\|_1\cdot\|g\|_1$
De plus, $(L^1(\lambda^n),+,\times,*)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre ne possédant pas d'unité pour $*$.

Déf : Soit $f\in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_n)$. La transformée de Fourier de f est la fonction $\hat f$ définie par $\hat f(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle u|x\rangle}f(u)\,d\lambda(u)$
$\hat f$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^n$

Pté : Soient $(f,g)\in L^1(\lambda_n)$, alors $\widehat{f*g}=\hat f\hat g$

Rq : Utile pour démontrer que $*$ n'admet pas de neutre

Propo : Si $\hat f\in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda_n)$ alors on a l'égalité
$(2\pi)^n f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat f(u)e^{i\langle u|x\rangle}d\lambda(u)=\hat{\hat f}(-x)$
(formule d'inversion de Fourier)

$L^1(\mathbb{T})$ et noyau de Fejér

2) Le cas $L^2(\mu)$

<u>Prop</u> : On peut munir $L^2(\mu)$ du produit hermitien
$$\langle f \mid g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu \quad \text{pour } (f,g) \in L^2(\mu)$$
et de la norme associée $\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$
Ainsi $(L^2(\mu), \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert

<u>Rq</u> : L'identité du parallélogramme et la projection $\perp$ y sont notamment valables.

<u>Prop</u> : Soit $\phi : L^2(\mu) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue
Alors $\exists ! \, g \in L^2(\mu)$ telle que $\forall f \in L^2(\mu)$, $\phi(f) = \langle f \mid g \rangle$

$\perp$?

3) Autres

ωL^p, $E(1)$

Références

[B-P] BRIANE-PAGES
Théorie de l'intégration (4e éd)

[H-L] HIRSCH-LACOMBE