235

Suites et séries de fonctions intégrables
Exemples et applications

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Généralités

1) Définitions

Df : Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{K}$.
f est μ-intégrable si $\int_X |f| d\mu < +\infty$
On note $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$ μ-intégrables.

Prté : • L'application $\left(\begin{array}{l}\mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{K} \\ f \mapsto \int_X f d\mu\end{array}\right)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mu)$

- Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$
- Pour $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tq $f \leq g$, $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

2) Théorèmes de convergence

• Th de Beppo-Levi : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Alors $\lim_{n\in\mathbb{N}} (f_n)$ est mesurable et
$$\int_X \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_X f \, d\mu$$

Lemme de Fatou : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
Alors $0 \leq \int_X \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}\left(\int_X f_n \, d\mu\right) \leq +\infty$

Rq : Découle du th de B-L avec $\varphi_n = \inf_{k \geq n} f_k$ et de la $\nearrow$ de $\int_X$

Appli : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions intégrables tq $\sup \int |f_n| d\mu < \infty$ alors la limite est également dans $\mathcal{L}^1(\mu)$

Th de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant :
- Pour μ-presque tout x, $f_n(x)$ converge (dans $\mathbb{K}$) qd $n \to +\infty$
- Il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, pour μ-presque tout x, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$

Alors il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que :
- pour μ-presque tout x, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$
- $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$

Des résultats sur les suites se déduisent ceux sur les Σ

Propo : Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives.
Alors $\int_X \sum_{n\geq 1} \varphi_n \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n \, d\mu$

Rq : C'est le th de B-L à $f_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$

Propo : Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{K}$ telle que $\sum_{n\geq 1} \left(\int_X |\varphi_n| d\mu\right) < +\infty$. Alors :
- Les fonctions φ_n $(n \in \mathbb{N})$, $\sum_{n\geq 1} |\varphi_n|$ et $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ sont intégrables
- on a l'égalité $\int_X \left(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n \, d\mu$

Appli (Lemme de Borel-Cantelli) : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$
Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim_n} A_n) = 0$

Rq : Le théorème de convergence dominée intervient pour démontrer le théorème de continuité sous le signe intégral.

II Exemples et applications

1) Les espaces $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$

$K = \mathbb{R}$

Déf : Soit $p \in [1, +\infty[$.

- La norme L^p de f est $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \in [0, +\infty]$
- La norme L^∞ de f est $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid \mu(\{f > M\}) = 0\}$
- $\forall q \in [1, +\infty]$, on définit la relation d'équivalence $\sim_q$ par $f \sim_q g$ ssi $\|f - g\|_q = 0$

Déf : $\forall p \in [1, +\infty]$, on définit $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < \infty\}$ et le quotient de $\mathcal{L}^p$ par $\sim_p$ est noté $L^p(\mu)$.

Propté : $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Lemme : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $(X, \mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$

Alors $\forall p \in [1, +\infty[$, $\|\sum_{n \geq 1} f_n\|_p \leq \sum_{n \geq 1} \|f_n\|_p$

$\boxed{\text{DEV 1}}$ Théorème de Riesz–Fischer

> Les espaces $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1, +\infty]$ sont complets et sont des espaces de Banach

Propo : Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de $L^p(\mu)$, $p \in [1, +\infty]$ et f fonction quelconque.

- Si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ et $f \in L^p(\mu)$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite qui converge μ-p.p vers f.
- Si $f_n \xrightarrow{\mu\text{-pp}} f$ et si $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$ et s'il existe $g \in L^p$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ-p.p, alors $f \in L^p(\mu)$ et $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

2) Probabilités

Dans ce paragraphe, $\mu(X) = 1$ ie μ mesure de probabilité.

Déf : Une suite de variables aléatoires (va) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans L^p ($p \geq 1$) vers une va X si $\lim_n (\mathbb{E}(|X_n - X|^p)) = 0$

Rq : On peut définir la convergence ps et retrouver les résultats de la fin du II.1).

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de va iid tel que $X_1 \in L^2(\mu)$.

Alors $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ vérifie $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$

Loi forte des grands nombres : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de va iid tel que $X_1 \in L^1(\mu)$

Alors $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ vérifie $S_n \xrightarrow{ps} \mathbb{E}(X_1)$ et $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2} \mathbb{E}(X_1)$

Rq : Forte car hypothèse plus faible et résultat plus fort.

Théorème Central Limite : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de va iid tel que $X_1 \in L^2(\mu)$. On pose $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z$

$\boxed{\text{DEV 2}}$ Formule de Stirling

> Le TCL appliqué à la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid où X_i suit une loi de Poisson de paramètre 1 permet de retrouver la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

E(1)

3) Fourier

- Th de Fejer et $L^1(\mathbb{T})$

<u>Références</u> (I, II 1)

BRIANE-PAGES