Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

I Méthodes élémentaires

Dans cette partie, on considère l'intégrale de Riemann

1) Intégration par parties et primitives

Prop (Intégration par parties) : Soient $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors

$$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)$$

Ex : Intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \cos dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $\left(\begin{cases} f = \sin^{n-1} x \\ g = \cos x \end{cases}\right)$

Prop : Toute application continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet au moins une primitive F et pour toute primitive F de f, on a $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Rq : Il est dès lors pertinent de chercher à déterminer des primitives pour le calcul d'intégrales

Ex 0 : Primitives usuelles ($\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = [\operatorname{Arctan}(x)]_a^b$)

Ex 1 : Primitives des fractions rationnelles

Soit F une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$. On peut décomposer F en élément simples, le calcul de $\int F$ se ramène au calcul des primitives de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + \gamma x + \delta)^k} \text{ où } \gamma^2 - 4\delta < 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}^*$$

Ex : $\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$, $k \in \mathbb{R}$

Ex 2 : Primitives de polynômes en cos et sin

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X,Y]$

Le calcul de $\int P(\cos(x), \sin(x))\,dx$ se ramène au calcul de $\int \cos^m(x) \sin^n(x)\,dx$ où $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ qu'on peut effectuer en linéarisant le monôme $\cos^m(x)\sin^n(x)$ afin de se ramener à un polynôme en $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ $_{k \in \mathbb{N}}$ (grâce aux formule d'Euler et aux formules de trigonométries)

Ex : $\int \cos^4(x)\,dx = \int \frac{\cos(4x)}{8} + \int \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$

2) Changement de variables

Prop : Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application C^1 et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue tq $\varphi([a,b]) \subset I$ (I intervalle de $\mathbb{R}$)

Alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x)\,dx$

Ex 0 : Si f est T-périodique continue, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$

Ex 1 : Règles de Bioche

Elles s'appliquent au calcul de $\int R(\cos(x), \sin(x))\,dx = I$ où R est une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X,Y)$.

- Si I reste inchangé en changeant x en $\pi - x$, on pose $t = \sin(x)$
- Si I reste inchangé en changeant x en $-x$, on pose $t = \cos(x)$
- Si I reste inchangé en changeant x en $\pi + x$, on pose $t = \tan(x)$
- En cas d'échec de ces trois cas, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

On se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en t, qu'on sait calculer.

Ex : $\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \cos(x) - 2\operatorname{Arctan}(\cos x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

Rq : Mêmes analogues pour $\int R(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))\,dx$

Ex 2 : Intégrales abéliennes

- Calcul de $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$, $R \in \mathbb{R}(X,Y)$ et $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$

Faire le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ pour se ramener au cas $\int R(g(t), t) g'(t)\,dt$ où $g(t) = x$ d'une fraction rationnelle

- Calcul de $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,dx$, $R \in \mathbb{R}(X,Y)$, $\alpha \neq 0$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$

Selon le signe de $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ et de α, il faut effectuer divers changements de variables qui ramène à un cas qu'on sait calculer.

3) Sommes de Riemann

Ex : Pour $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Ex : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$

Briane/Pagès - "Théorie de l'intégration"

II Méthodes issues de la théorie de la mesure

Dans cette partie et sauf mention contraire, on considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et λ la mesure de comptage.

1) Applications des théorèmes de convergences (interversion lim $\int$)

Th de Beppo-Levi : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions boréliennes positives. Alors :
$f := \lim_n f_n$ est borélienne et $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda \in \overline{\mathbb{R}_+}$

Rq : On peut trouver $(f_n)_n$ tq $f_n \to f$ pour calculer $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$

Ex : $\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x} d\lambda(x) = \frac{1}{1-\alpha}$ pour $\alpha < 1$ via $I_n = \int_0^{\infty} (1-\frac{x}{n})^n d\lambda(x)$

Lemme de Fatou : Soit (f_n) une suite de fonctions borélienne positive, alors : $\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim} f_n d\lambda \leq \underline{\lim} (\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda) \in \overline{\mathbb{R}_+}$

Th de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions éléments de $\mathcal{L}^1_\lambda(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), f fonction borélienne vérifiant
- λ-pp x, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$
- $\exists g \in \mathcal{L}^1_\lambda(\mathbb{R})^{\geq 0}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, λ-pp $\forall x$, $|f_n(x)| \leq g(x)$

Alors :
- f est élément de $\mathcal{L}^1_\lambda(\mathbb{K})$
- $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$

Ex :

2) Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $f : (u,x) \in E\times X \to f(u,x) \in \mathbb{R}$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ esp. mesuré et (E,d) esp. métrique

Th de continuité sous le signe intégrale : Soit $u_0 \in E$. Si f est telle que
- $\forall u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ mesurable de $(X,\mathcal{A})$ ds $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- μ-pp $\forall x$, $u \mapsto f(u,x)$ continue en u_0
- $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ positive tq $\forall u \in E$, μ-pp $\forall x$, $|f(u,x)| \leq g(x)$

Alors :
- $F : u \mapsto \int_X f(u,x) d\mu(x)$ est bien définie sur E
- F est continue en u_0

Rq : Th de $\mathcal{C}^0$ local

Rq : Les énoncés du type (μ-pp $\forall x$, A) peuvent se réécrire $\exists N \in \mathcal{A}$ tq $\mu(N) = 0$ et $\forall x \notin N$, A

Ex : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est bien déf et $\Gamma(n) = (n-1)!$

Th de dérivabilité sous le signe intégrale : Soit $E = I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est telle que
- $\forall u \in I$, $x \mapsto f(u,x)$ intégrable pour μ sur $\mathbb{R}$
- μ-pp $\forall x$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur I
- $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ positive tq $\forall u \in I$, μ-pp $\forall x$, $|\frac{\partial}{\partial u} f(u,x)| \leq g(x)$

Alors F est dérivable sur I et $F'(u) = \int_X \frac{\partial}{\partial u} f(u,x) d\mu(x)$

Rq : Théorème nécessairement global

Rq : Existe en version holomorphe avec une majoration de $|f(u,x)|$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

Ex :

3) Théorèmes de Fubini et changements de plusieurs variables

Th de Fubini-Tonelli : Soit $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurable
Alors :
- $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y)$ et $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x)$ sont boréliennes
- $\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x)) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y)) d\lambda(x)$

Ex :

Th de Fubini-Lebesgue : Soit $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to \mathbb{R}$ et on suppose $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda^2)$. Alors
- φ et ψ sont définies λ-pp et éléments de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$
- $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x)) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y)) d\lambda(x)$

Rq : Marchent pour toute mesure σ-finie comme la mesure de comptage

$\boxed{\text{Dev 1}}$ Prolongement de la fonction Γ

Th - Changement de variables : Soit φ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre deux ouverts Δ et D de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$. Alors, pour $f : D \to \mathbb{R}$ borélienne
- f est λ_D-intégrable sur D ssi $(f\circ\varphi)|J_\varphi|$ est λ_Δ-intégrable sur Δ

où λ_D est la mesure image par φ de $|J_\varphi| \cdot \lambda_\Delta$
- Dans ce cas, $\int_D f(x) d\lambda(x) = \int_\Delta f(\varphi(u)) |J_\varphi|(u) d\lambda(u)$

Ex :
- $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- Coordonnées cylindriques et sphériques (A dev)

III Autres méthodes

(1) Intégrales curvilignes / théo Green-Riemann)
2) Analyse complexe
3) Approximation d'intégrales

Références (I, II)

GOURDON
BRIANE-PAGES
EL LAAMRI