240

Produit de convolution, transformation de Fourier - Applications

On note $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ à support compact et λ_d la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$.

I Produit de convolution

1) Définitions et propriétés

Déf : Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ borélienne. On définit la a-translatée de f par
$$\tau_a f \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x-a) \end{array} \right)$$
C'est aussi une application borélienne.

Déf : Soient $f, g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to \mathbb{K}$ deux fcts boréliennes. La convolée de f et de g notée $f * g$ est défini pour $x \in \mathbb{R}^d$ par
$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_y f(x) g(y)\, d\lambda_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, d\lambda_d(y)$$
lorsque cette expression est bien définie.

Rq : Si $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ boréliennes ou si $|f| * |g|(x) < +\infty$ - $(f*g)(x)$ est bien définie (en x).

Prop : - La convolution est commutative lorsque $f*g$ ou $g*f$ existe
- $|f*g|(x) \le (|f| * |g|)(x)$
- Si $f_1 = f_2$ λ-pp et $g_1 = g_2$ λ-pp, $f_1 * g_1 = f_2 * g_2$.
- La convolution de fonctions positives est associative mais pas dans le cas général, il faut $(|f| * |g| * |h|)(x) < +\infty$)

Prop : La convolution $f*g$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ si l'un de ces conditions est vérifiée :

- $f \in L^1(\lambda_d)$ et $g \in L^\infty(\lambda_d)$ et alors $|f*g(x)| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$
- $f \in L^p(\lambda_d)$ et $g \in L^q(\lambda_d)$ avec $p, q \in]1, +\infty[$

et alors $|f*g(x)| \le \|f\|_p \|g\|_q$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ et $\lim_{\|x\| \to +\infty} f*g(x) = 0$

Rq : On a besoin de $\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a \to 0]{} 0$

Cor : Si $(f,g) \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)^2$, alors $f*g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$

Th : Soient $(f,g) \in L^1(\lambda^d)$: alors $f*g$ est défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $f*g \in L^1(\lambda^d)$ avec $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$

Ainsi : $(L^1(\lambda^d), +, \times, *)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative mais ne possédant pas d'unité

Prop : Si $f \in L^1(\lambda^d)$ et $g \in L^r(\lambda^d)$ où $r \in]1, +\infty]$ alors $f*g$ existe λ^d pp et $f*g \in L^r(\lambda_d)$ et vérifie $\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_r$

2) Régularisation

Soit $L^1(\mathbb{T})$, l'ensemble des fonctions 2π-périodiques telque $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$ est fini.

On y définit le produit de convolution - pour $f, g \in L^1(\mathbb{T})$
$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) g(y)\, dy$$

Soit, pour $k \in \mathbb{Z}$, $e_k \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{ikx} \end{array} \right)$ et notons $c_n(f)$ les coefficients de Fourier de f.

Rmk : $c_n(f) e_n = f * e_n$ (en est νp de $*$)

Notons pour $N \in \mathbb{N}$, $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$ le noyau de Dirichlet

pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ $K_N = \frac{1}{N}(D_0 + \dots D_N)$ le noyau de Fejer

$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k$ la N-ième somme partielle de Fourier

$\sigma_N(f) = \frac{1}{N}(S_0 + \dots + S_N)$ la N-ième somme partielle de Fejer.

DEV 1 Théorème de Fejer

1)

→ Ceux approximation de l'unité ? Non je crois

Rq : Exemple de régularisation via la convolution

Propo : Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^n(\mathbb{R}^d)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$
Alors $f * \varphi$ est bien déf sur $\mathbb{R}^d$ et $f * \varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^d)$

Propo : $\forall p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|.\|_p$

II Transformation de Fourier

1) Définitions et propriétés

Déf : Soit $f \in L^1$; on appelle transformée de Fourier de f l'application $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i2\pi \langle x | u \rangle} f(u)\, d\lambda_d(u)$

Propo : Soit $f \in L^1$, alors $\hat{f}$ vérifie :
- $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$
- $\hat{f}$ est continue et bornée.
- $\lim_{|u| \to \infty} \hat{f}(u) = 0$ (théorème de Riemann-Lebesgue)

Ex/Ppté : Soit $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$; soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$: $\forall x \in \mathbb{R}^d$
- $\widehat{\tau_a f}(x) = e^{-2\pi i \langle x | a \rangle} \hat{f}(x)$
- $(e^{2\pi i \langle a | x \rangle} f)\hat{}(x) = \hat{f}(x-a)$
- si $a \in \mathbb{R}$, $d = 1$, $(e^{-ax^2})\hat{}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}}$

Propo : Soit $\mathcal{F}\left(\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array}\right)$
Alors pour $(f, g) \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$
De plus, si $(\hat{f}, \hat{g}) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$
et $\mathcal{F}$ définit un morphisme de groupe pour le produit de convolution.

Ppté : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$
Alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{f^{(k)}}(x) = (2\pi i x)^k \hat{f}(x)$

2) Inversion de $\mathcal{F}$ et extension de $\mathcal{F}$.

Th : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$
Alors la fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ tq pour $x \in \mathbb{R}^d$,
$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u)\, e^{2\pi i \langle x | u \rangle} du$ vérifie pour tt pp x
$\varphi(x) = f(x)$

Cor : Sous ces hypothèses, $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$

Propo : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} = 0$.
Alors $f = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$
ie $\mathcal{F}$ est injective de $L^1(\mathbb{R}^d)$ ds $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$.

Th de Plancherel : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$
Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

Rq : Via la densité de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$
et par prolongement uniforme.

Propo : Il existe un unique automorphisme de L^2 qui prolonge l'isométrie $\left(\begin{array}{ccc} L^1 \cap L^2 & \to & L^2 \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}\right)$

Rq Att : Si $f \in L^2 \setminus L^1$, la définition intégrale n'a pas de sens !

Loc

III Applications aux probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé
Les variables aléatoires seront prises de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

1) Fonctions caractéristiques

Déf : Soit X une va de loi $\mathbb{P}_X$.
La fonction caractéristique de X notée φ_X
est la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}^d$ par
$\varphi_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, u\rangle} \, d\mathbb{P}_X(u)$

Rque : La formule de transfert assure que :
$\forall t \in \mathbb{R}^d, \ \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle X, t\rangle})$

Prop : Soit X une va, alors φ_X vérifie
1/ - $|\varphi_X(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi_X(0) = 1$
2/ - φ_X est continue
3/ - si $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{i\langle b,t\rangle} \varphi_X(at) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$
4/ - $\varphi_{-X} = \overline{\varphi_X}$
5/ - si $\mathbb{E}(|X|^m) < +\infty$, φ_X est de classe $\mathcal{C}^m$ et $\forall k \leq m$
$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \, \mathbb{E}(X^k e^{i\langle t, X\rangle})$

Props : Soient X, Y deux va. Alors
1/ - $\varphi_X = \varphi_Y$ ssi $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} Y$
2/ - Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$
et si X et Y admettent une densité f_X et f_Y, $f_{X+Y} = f_X * f_Y$

Exs :

2) Théorème de Lévy et applications

Références

[B-P] BRIANE-PAGES
[Laa] El Haj LAAMRI
[Ouv] OUVRARD