241

Suites et séries de fonctions
Exemples et contre-exemples

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie (donc complet), soit $\mathcal{B}(X,E)$, le $\mathbb{K}$-ev des applications de X dans E bornée et la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$ sur $\mathcal{B}(X,E)$ où $X \subset \mathbb{K}$ non vide ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

I Généralités

1) Modes de convergence

Déf : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E. On dit que
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \in E^X$ sur X (noté $f_n \xrightarrow{S} f$) si $\forall x\in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ dans E
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in E^X$ sur X (noté $f_n \xrightarrow{U} f$) si $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$, $\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \varepsilon$ $\forall x\in X$

Thé : On a $f_n \xrightarrow{U} f$ si l'un de ces critères est vérifié :
- $f_n \in \mathcal{B}(X,E)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall p,q\geq N$, $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$ $\forall x\in X$

(c'est le critère de Cauchy uniforme)

Prop : $f_n \xrightarrow{U} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{S} f$ mais la réciproque est fausse

C-Ex : $f_n(x) = \dfrac{1}{(x-n)^2+1}$ pour $x\in\mathbb{R}$

Déf : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de X dans E. On dit que
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers F, noté $\sum f_n \xrightarrow{S} F$ (resp. converge uniformément vers F, noté $\sum f_n \xrightarrow{U} F$) sur X si la suite des sommes partielles (suite de fonctions) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ vérifie $S_n \xrightarrow{S} F$ ($S_n \xrightarrow{U} F$)
- $\sum f_n$ converge absolument vers F sur X noté $\sum f_n \xrightarrow{A} F$ si la série de réels $\sum \|f_n(x)\|_E$ converge vers $F(x)$ $\forall x\in X$
- $\sum f_n$ converge normalement sur X noté $\sum f_n$ CV N si la série de réels positifs $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Prop : $\sum f_n$ CV N $\Rightarrow$ $\sum f_n$ CV A $\xRightarrow{E \text{ complet}}$ $\sum f_n$ CV S
$\Rightarrow \sum f_n$ CV U $\Rightarrow$

Rq : La convergence normale est la plus forte et en plus, elle est facile à étudier ($\sum$ de termes positifs et pas besoin de connaître la somme F)

Ex : $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n!}$ pour $x\in\mathbb{R}$ converge normalement

C-Ex : 1/ $f_n(x) = -\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$ pour $x\in[0,1]$ CV U mais pas CV N

2/ $f_n(x) = e^{-nx}$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ CV A mais ni CV U ni CV N

Prop : Les suites de fonctions uniformément convergentes sur X forment un ev
Les séries de fonctions normalement convergentes sur X forment un ev

2) Continuité et dérivabilité de la limite

Prop : Soient $a\in X$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de E^X et $f\in E^X$.
1/ Si $f_n \xrightarrow{U} f$ et f_n continue en a $\forall n$, alors f continue en a
2/ Si $\sum f_n \xrightarrow{U} F$ et f_n continue en a $\forall n$, alors F continue en a

Rq : Généralisation possible pour la continuité sur X.
Si $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$, alors $\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(a_k) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} f_n(a_k) = f(a)$
et $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{k\to\infty} f_n(a_k) = F(a)$

Appli : $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathcal{B}(0,1)$

C-Ex : 1/ $f_n(x) = x^n$ pour $x\in[0,1]$: $f(x) = \delta_1$ pas continue !
2/ $f_n(x) = (1-x)x^n$ pour $x\in[0,1]$

La cv simple suffit pas !

Prop : Soient $X = I$ intervalle de $\mathbb{R}$, f_n et f de I dans E $\forall n\in\mathbb{N}$.
et supposons $f_n \in \mathcal{C}^1$ sur I $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n \xrightarrow{S} f$, alors $f_n \xrightarrow{U} f$ et $g = f'$
1/ Si $f_n' \xrightarrow{U} g$ où $g\in E^I$ et $f_n \xrightarrow{S} f$, alors $f_n \xrightarrow{U} f$ et $g = f'$
2/ Si $\sum f_n'$ CV U et $\sum f_n$ CV S, alors $\sum f_n$ CV S et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

Rq : On aurait pu se passer de ~~une~~ convergence uniforme sur les compacts de I et obtenir
Se généralise à $\mathcal{C}^k$, $k\in\mathbb{N}$ et à $\mathcal{C}^\infty$

C-Ex : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ pour $x\in\mathbb{R}$: $\lim_n f_n(x) = |x|$ non $\mathcal{D}^1$ en 0

Appli : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est une appli $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ (de $\mathbb{R}$)

Th de Dini : $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ continue et $f_n \xrightarrow{S} f$
- Si la suite (f_n) est croissante, alors $f_n \xrightarrow{U} f$
- Si $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est croissante, alors $f_n \xrightarrow{U} f$

Rq : Réciproque des th de $\mathcal{C}^\infty$

3) Intégrabilité de la limite

Prop : Soit $X=[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, f_n et $f \in \mathbb{R}^I$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et f_n C^0 sur X $\forall n$.

1/ Si $f_n \xrightarrow{U} f$, alors f C^0 sur $[a,b]$ et $(\int_a^b f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_n f_n$

2/ Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ cv U, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ C^0 sur $[a,b]$ et $\sum_{n\geq 0}(\int_a^b f_n)$ converge avec $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

Th de Beppo Levi : Soit $(X,\mathcal{A},\lambda)$ un espace mesuré (salable, ou bornée) Soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ mesurables positives tq la suite $(f_n)\nearrow$. Alors $\lim_n f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_n f_n \, d\lambda = \lim_n \int f_n \, d\lambda$

Lemme de Fatou : Si $f_n : X \to \mathbb{R}$ mesurables positives $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\int_X \underline{\lim} f_n \, d\lambda \leq \underline{\lim} \int_X f_n \, d\lambda$

Ex : $\int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1} dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) = 0$

Coro : Si $f_n : X \to \mathbb{R}$ mesurables ≥ 0, $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \int f_n \, d\lambda = \int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\lambda$

Th de convergence dominée : Soit $f_n : X \to E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mesurable tq
- pour presque tout x (cad λ pp x), $f_n(x)$ converge (simplement)
- $\exists g$ fonction intégrable positive tq $\forall n \in \mathbb{N}$, λ pp x, $|f_n(x)| \leq g(x)$

Alors il existe une fonction intégrable f tq $f_n(x) \to f(x)$ λ pp x et telque $\lim_n \int_X f_n \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda$

Coro : Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ mesurables $\forall n$ tq la série $\sum f_n$ converge simplement et tel que $\sum_{n\geq 1} \int_X |f_n| \, d\lambda$ converge.
Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ mesurable et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n \, d\lambda = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

Rq : Le th de cv dominée appliquée à la mesure de comptage permet de retrouver $\lim \sum f_n = \sum \lim f_n$.

Ex : $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

II Exemples et applications

1) Intégration / Probas

2) et 3) Théorème de Stone et conséquences?

Densité des C^0 pas D^1)

Analyse complexe?

Séries de Fourier?

Séries entières?

1/ $f_n \xrightarrow{S} 0$
mais $f_n(x_n) = 1$ donc $\|f_n\|_\infty \geq 1$ et $f_n \overset{U}{\not\longrightarrow} 0$

2/ $\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

3/ ① $f_n \xrightarrow{S} f$, $\forall n$ f_n C^0 sur $[0,1]$
mais $f(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ non continue !

② $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = F$ où $F(x) = \begin{cases} 0 & x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ non continue !
alors que f_n continue sur $[0,1]$ $\forall n$

4/ $f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} \xrightarrow{U} |x|$
$(x \in \mathbb{R})$ mais $|.|$ non dérivable en 0
alors que f_n C^1 en 0

5/ th de Beppo-Levi avec la suite des sommes partielles

Références

[Mon]

[Hau]

[BP]