Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

I Généralités

1) Définitions

Déf : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où z est la variable complexe et où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes.

Lemme d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière (s.e.). Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite bornée. Alors :
- $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument
- $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$

Déf : Soit $\sum a_n z^n$ une s.e., il existe un unique élément $R \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0,+\infty]$ tel que
$\forall z \in \mathbb{C}$: si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument ; si $|z| > R$, $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
On l'appelle le rayon de convergence (ray de CV) de la série entière $\sum a_n z^n$

Rq : On note que $R = \sup_{n\geq 0} \{r \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$

Ppté : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de ray de CV R. Si $|z| > R$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge

Rq : Cf schéma en annexe.
Le cercle $\mathcal{C}(0,R)$ est appelé cercle d'incertitude car pour $z \in \mathcal{C}(0,R)$, $\sum a_n z^n$ peut converger ou diverger.

2) Calcul du rayon de convergence

Propo : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e. de ray de CV R_a et R_b
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$ ou si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geq R_b$
Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$

Règle de d'Alembert : Soit $\sum a_n z^n$ une s.e. de ray de CV R. Et supposons que $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = \frac{1}{\ell}$ (avec $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$)

Ex : Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et soit la s.e. $\sum \frac{1}{n^\alpha} z^n$
Alors le rayon de convergence est égal à 1

Formule d'Hadamard : Soit $\sum a_n z^n$ une s.e. de ray de CV R
Alors $1/R = \limsup |a_n|^{1/n} \in \overline{\mathbb{R}_+}$

Rq : Plus théorique, plus dur à faire marcher.

Exemple important : La s.e. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence
Avec $\forall z \in \mathbb{C}$ $\exp(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

3) ~~Sur le cercle d'incertitude~~

~~On peut se ramener au cas $R = 1$ pour toute s.e. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ qui n'admet pas $R = +\infty$ via la s.e. $\sum_{n\geq 0} a_n R z^n$~~
~~Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de ray de CV $R = 1$.~~

II Propriétés de la somme

Déf : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R
La somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est la fonction S définie par $\left(\begin{array}{ccc}\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n\end{array}\right)$

Ex : Si $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme S est $\left(\begin{array}{ccc}D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{1-z}\end{array}\right)$

1) Linéarité et produit de Cauchy

Ppté : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de ray de cv R_a et R_b et de somme S_a et S_b. Soit la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ de rayon de cv R_{a+b} et de somme S_{a+b}. Alors

- $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ et si $R_a \neq R_b$, il y a égalité.
- Pour $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < \min(R_a, R_b)$, $S_{a+b}(z) = S_a(z) + S_b(z)$

Ppté : Multiplier par un scalaire une s.e. ne modifie pas son rayon de convergence et sa somme est alors égal au produit du scalaire par la somme précédente.

Déf : Soient $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Le produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ppté : Avec les notations précédentes et en notant R_{ab} et S_{ab} le ray de cv et la somme de $\sum c_n z^n$, alors :

- $R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)$
- $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < \min(R_a, R_b)$, $S_{ab}(z) = S_a(z) S_b(z)$

2) Régularité de la somme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de ray de cv $R > 0$ et de somme S

Ppté : S est continue sur $D(0,R)$

Th : S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. De plus, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-R,R[$ $S^{(p)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}$

et en particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$

Ex : $\exp' = \exp$ via ce théorème.

3) Analycité de la somme

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de ray de cv $R > 0$ et de somme S

Th : S est holomorphe donc analytique sur le disque ouvert $D(0,R)$.

Déf : Une fonction analytique sur $L \subset \mathbb{C}$ est une fonction développable en série entière en tout point de L.

Consq : S analytique s'écrit :
$\forall a \in D(0,R)$, pour $z \in D(0,R)$, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

Principe des zéros isolés : Soit S la somme de la série entière et $D(0,R)$ le disque de convergence. Alors : • L'ensemble des zéros de S $Z(S)$ est dénombrable.
• Si $Z(S)$ admet un point d'accumulation dans $D(0,R)$, alors $S = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$

Principe du prolongement analytique : Si $L \subset D(0,R)$ est un sous-ensemble ayant un point d'accumulation dans un ouvert connexe et si $\exists f : L \to \mathbb{C}$ tq $f = S$, alors $f = S$ sur $D(0,R)$

III Exemples et applications

1) Sur le cercle d'incertitude

Soit une s.e. $\sum a_n z^n$ de ray de cv $R > 0$. On peut via la s.e. $\sum a_n (Rz)^n$ se ramener au cas $R = 1$.
→ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme S.

Déf : Soit $a \in \mathcal{C}(0,1)$ le cercle unité. Le point a est dit régulier s'il existe un voisinage de a (ouvert) Ω tel que S admette un prolongement analytique en $\Omega \cap D$.
a est dit singulier s'il n'est pas régulier.

Ex : 1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} z^n$ est une série entière de ray de cv 1 tel que $\forall z \in \mathcal{C}(0,1)$, $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ converge

2) $\sum_{n\geq 0} z^n$ est une série entière de ray de cv 1 tel que $\forall z \in \mathcal{C}(0,1)$, $\sum z^n$ diverge

Ainsi, $\forall z_0 \in \mathcal{C}(0,1)\setminus\{1\}$, $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ |z|<1}} S(z) \neq \frac{1}{1-z_0}$

Théorème d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de ray de cv 1 tel que $\sum a_n$ converge et de somme S.
Soit $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ fixé et on pose
$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1$ et $\exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ tq $z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$
Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Rq : Il y a une réciproque partielle : si $a_n = o(\frac{1}{n})$ et $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z<1}} f(z) = \ell$ alors $\sum a_n$ converge et $\sum a_n = \ell$
Plus dur, la condition $a_n = O(\frac{1}{n})$ suffit.

Ex : Le théorème d'Abel donne $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Ex : $\sum_{n \geq 0} z^n$ admet que des points réguliers sur $\mathcal{C}(0,R)$ sauf $z = 1$.

Th : Sur le cercle d'incertitude de toute série entière, il y a au moins un point singulier.

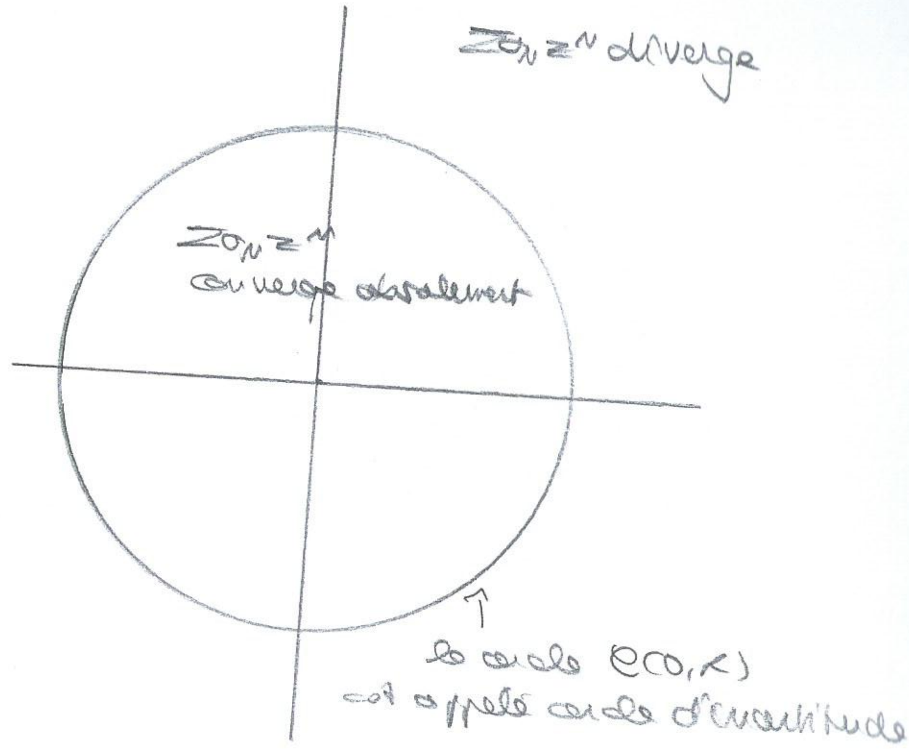
2) Fonctions génératrices

3) Fct ~~DSE~~ ou équa diff

(1) Mais pas cv normale sur tout compact !

(2) Pb 1 : Peut-on passer à la limite sur le cercle ? Y a-t-il CV ou DV

Pb 2 : Y a-t-il un prolongement analytique sur le cercle ?



Schéma

Références

GOURDON
MONIER
Objectif Agrégation
ZUILY - QUEFFELEC