245

Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

I Généralités sur les fonctions holomorphes

1) Définitions et conditions de Cauchy-Riemann

Déf : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \Omega$.
- f est $\mathbb{C}$-dérivable en a si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$.

  Celle-ci est notée $f'(a)$ et $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ est la dérivée de f.
- f est holomorphe sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.

Not : $G(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$.

Ppté : $G(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre et les formules sur les $\mathbb{R}$-dérivées restent valables pour les fonctions holomorphes.

Déf : f est différentiable en a s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire T de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour h au voisinage de 0, $h \in \mathbb{C}$,
$f(a+h) = f(a) + T(h) + o(\|h\|)$

Ppté : Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, f est différentiable en a. De plus, $df_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est la similitude directe de rapport $f'(a)$

Rq : Il y a réciproque en fait ($\Leftrightarrow df_a$ $\mathbb{C}$-linéaire même)

Conditions de Cauchy-Riemann : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, ($P = \mathrm{Re}(f)$ et $Q = \mathrm{Im}(f)$, $f = P + iQ$)

$f \in G(\Omega) \Leftrightarrow f$ différentiable sur Ω et $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \end{cases}$ $\quad z = x + iy$

2) Exemples

1/ $\begin{pmatrix} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{pmatrix}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

2/ $\begin{pmatrix} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^n \end{pmatrix}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

3/ Toute fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$: entière

Déf : Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est dite entière.

4/ Toute fonction f qui est somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $D(0,R)$ est holomorphe sur $D(0,R)$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme.

5/ **Déf** : Une fonction $\Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-analytique si elle est développable en série entière (comme de Taylor) au voisinage de chaque point $z_0 \in \Omega$: $\forall z_0 \in \Omega$, $\exists (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\exists r > 0$ tq $\forall z \in D(z_0, r)$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$

On note $A(\Omega)$ l'ensemble des fct analytiques sur Ω

Ppté : $\boxed{A(\Omega) \subset G(\Omega)}$ ie toute fonction analytique est holomorphe

6/ **Déf** : ~~A partir de l'exponentielle réelle et des cosinus et sinus réels~~ on peut définir pour $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$: $e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$.

Ppté : L'exponentielle est une fonction entière et $(e^z)' = e^z$

3) ~~Théorème de Cauchy et primitives~~ Intégration dans $\mathbb{C}$

Déf : On appelle chemin dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ toute application $\gamma \begin{pmatrix} [a,b] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C} \\ t \mapsto \gamma(t) \end{pmatrix}$ $\mathcal{C}^1$ (souvent $a = 0$ et $b = 1$)

Le chemin est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Déf : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \Omega$. L'intégrale de f sur γ est $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

On appelle longueur du chemin γ $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

Ppté : $\int_\gamma f(z)\,dz \leq \|f\|_\infty \ell(\gamma)$

Déf/Prop : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin et Ω ouvert de $\mathbb{C}$ tq $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \Omega$. Pour $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, on pose $\mathrm{Ind}(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,dt$

L'application $\begin{pmatrix} \Omega \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{Ind}(z, \gamma) \end{pmatrix}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ constante sur chaque composante connexe de Ω

Déf : $\mathrm{Ind}(z, \gamma)$ est l'indice de z par rapport à γ.

Rq : C'est le nombre de tour que fait le chemin autour de z

Lemme : Si $\gamma = \mathcal{C}(a, r)$ (cercle de centre a et de rayon r) alors
$\mathrm{Ind}(z, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - a| < r \\ 0 & \text{si } |z - a| > r \end{cases}$

Rq : On peut se ramener au cas du cercle (chemins homotopes)

II Propriétés des fonctions holomorphes

1) Formule de Cauchy (cas convexe) et conséquences

Prop : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Il est équivalent de
- f possède une primitive sur Ω
- $\forall \gamma$ chemin fermé de Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Lemme : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ et soit $T \subset \Omega$ un triangle convexe de $\mathbb{C}$.
Alors $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$

Rq : obtenu par triangulation de T.

Th de Cauchy : Soit Ω ouvert convexe et $f \in \mathcal{G}(\Omega)$
Alors f possède une primitive sur Ω.

Formule de Cauchy : Soit Ω ouvert convexe, $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, γ un chemin tel que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \Omega$ et $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. Alors
$$\mathrm{Ind}(z,\gamma) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Coro : $\mathcal{G}(\Omega) \subset \mathcal{A}(\Omega)$ (Ω convexe) ie toute fonction holomorphe est analytique. De plus, le rayon de convergence de la série de Taylor de $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ en z est au moins égal à $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ et si γ est un chemin fermé de Ω et $z_0 \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\boxed{f^{(n)}(z)\, \mathrm{Ind}(z,\gamma) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta}$$

En particulier, $f \in \mathcal{G}(\Omega) \Rightarrow f$ infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω

Rq : Même si $f \in \mathcal{G}(\Omega \setminus P)$ où P partie finie de parts de $\mathbb{C}$, tout ceci reste vrai sur $\Omega \setminus P$ (on peut éviter les points)

~~Rq : on applique à coro~~

2) Inégalités de Cauchy

Th : Soit $f \in \mathcal{G}(D(0,R))$ où $D(0,R)$ désigne le disque de centre 0 de rayon R où $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ $\forall n$. On note $\|f\|_{C(0,r)} = \sup_{|z|=r} \{|f(z)|\}$

Alors $\quad |a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{\|f\|_{C(0,r)}}{r^n} \quad \forall r < R,\ n \in \mathbb{R}_+^*$

Rq : Contrôle des dérivées / inverse de la distance / ...

Rq : C'est la formule de la moyenne !

Th de Liouville : Toute fonction entière et bornée est constante

Coro + **Th de d'Alembert-Gauss** : Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine ($\frac{1}{\text{polynôme}} \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$ bornée)

3) Principe du maximum

Def : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie le principe du maximum si elle est constante au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$ ~~tq $\exists V$ voisinage de z_0 tq $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ ie en lequel elle a un maximum relatif~~

~~**Prop** : Soit $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ Ω connexe alors f vérifie le principe du maximum~~

Prop : Soit Ω ouvert convexe

4) Prolongement analytique et zéros isolés

Prop : Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ - $f \in \mathcal{G}(\Omega)$. Alors
$f = 0 \iff \exists z_0\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = 0$

Rq : Faux pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: prendre $\varphi(x) = 0 \cdot 1_{\mathbb{R}_-}(x) + e^{-1/x} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$

Principe de prolongement analytique : Soit Ω ouvert connexe, $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$
Si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω, alors $f = g$ sur Ω

Rq : $\mathcal{G}(\Omega)$ anneau intègre.

Th de factorisation : Soit $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, Ω connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ et $f \neq 0$

On note $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f.

A chaque zéro $z_0 \in Z(f)$ correspond un unique entier $m \in \mathbb{N}$ et une unique fonction $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ telle que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ $\forall z \in \Omega$

m est la multiplicité de z_0 comme zéro de f.

Rq : m correspond au plus petit entier k tq $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ ie le premier coeff $\neq 0$ dans le DSE de f en z_0.

1 Coro : Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, r))$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$ (formule de la moyenne)

Rq : Cauchy sur $\partial D(z_0,r)$!

1 – 3) Principe du maximum

Prop : Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

1/ Si f admet un maximum global sur Ω, alors f est constante

2/ Si $|f|$ admet un maximum local sur Ω, alors f est constante

Rq : En fait, il suffit que f vérifie la formule de la moyenne.
La contraposée peut servir

Principe du maximum : Soit Ω ouvert connexe borné.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors

1/ $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq \|f\|_{\partial\Omega}$ (le max est sur le bord ie $\|f\|_{\partial\Omega} = \|f\|_{\overline{\Omega}}$)

2/ Si $f \neq$ cste, alors $|f(z)| < \|f\|_{\partial\Omega}$ $\forall z \in \Omega$

Lemme de Schwarz : Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ et soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ tq $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ (ie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$). Alors

- $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$
- $|f'(0)| \leq 1$
- Si $\exists z_0 \in \mathbb{D}$ tq $|f(z_0)| = |z_0|$, $z_0 \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$

alors $f(z) = \lambda z$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| = 1$

Rq : Permet d'étudier $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

3

Th des zéros isolés : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$. $f \neq 0$
$f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $z_0 \in Z(f)$. Alors z_0 admet un voisinage dans lequel f n'admet pas d'autre zéro.
Rq : On dit que les zéros de f sont isolés.

Coro : $Z(f)$ est un fermé discret de Ω.
$Z(f)$ est au plus dénombrable.

Rq : différent de $\mathcal{C}^\infty$!

III Exemples et applications

1) Suites et séries de fonctions holomorphes et intégration

Def : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f sur Ω si $\forall K$ compact de Ω, la suite $(f_{n|K})$ converge uniformément vers $f_{|K}$.
Rq : Même def pour les $\sum f_n$. On note $\|f_n\|_K = \sup \{|f_n(z)| / z \in K\}$

Th de Weierstrass : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(\Omega)$ où Ω ouvert de $\mathbb{C}$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers f.
Alors : • $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
• $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{cu}} f$ sur ~~tout~~ compact de K

Coro : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(\Omega)$ où Ω ouvert de $\mathbb{C}$ tq $\sum f_n$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers f.
Alors : • $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
• $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum f_n^{(k)} = f^{(k)}$

Ex/Appli : Ceci assure la def de $\zeta(z) = \sum \frac{1}{n^z}$ sur $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$

Th de Montel ($\sim$ Bolzano-Weierstrass de $\mathbb{C}$) - Th de Hurwitz

2) Fonctions spéciales
Γ et ζ et th. des nombres

3) Fonctions méromorphes - Th des résidus

Déf : On appelle singularité isolée z_0 de f si $z_0 \in \Lambda$, $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ est $f \in \mathcal{G}(\Lambda \setminus \{z_0\})$
~~la singularité isolée~~ z_0 est éliminable s'il est possible de prolonger f en une fonction holomorphe sur Λ

Propé : Si f est bornée au voisinage épointé d'une singularité z_0 et $f \in \mathcal{G}(\Lambda \setminus \{z_0\})$, alors f est éliminable

(*) Déf Série de Laurent
Th de Casorati - Weierstrass : Soit $z_0 \in \Lambda$, $f \in \mathcal{G}(\Lambda \setminus \{z_0\})$ et soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ la série de Laurent de f en z_0 : Alors

- z_0 est éliminable $\iff \forall n < 0,\ a_n = 0 \iff \lim_{z \to z_0} |f(z)| < \infty$
- $\exists m < 0$ tq $c_m \neq 0$ et $c_n = 0$ si $n < m \iff \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

Alors z_0 est appelé pôle de f de multiplicité m.
De plus, $\sum_{k=-1}^{m} a_k (z-z_0)^k$ est la partie principale de f en z_0.

- $\forall n < 0$, $a_n \neq 0 \iff$ l'image de tout vsg épointé de z_0 par f est dense dans $\mathbb{C} \iff \lim_{z \to z_0} f(z)$ n'existe pas
Alors z_0 est une singularité essentielle de f.

Déf : Une fonction $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ est méromorphe sur Λ si $f \in \mathcal{G}(\Lambda \setminus S)$ où S partie fermé discrète de Λ et telle que tout point de S sont des pôles de f.
On note $\mathcal{M}(\Lambda)$ l'ensemble des fonctions méromorphes de Λ

Propo : Si Λ est connexe, toute fonction méromorphe sur Λ est quotient de fonctions holomorphes sur $\mathcal{G}(\Lambda)$.

Rq : $\mathrm{Fr}(\mathcal{G}(\Lambda)) = \mathcal{M}(\Lambda)$

(*) Déf : Soit $\mathcal{C}(z_0, r, R)$ une couronne de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ ...
On appelle série de Laurent de f en z_0 la série $\sum a_n (z-z_0)^n$ où $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$
et f coïncident avec cette série si $f \in \mathcal{G}(\mathcal{C}(z_0, r, R))$

Calcul pratique si $f = \frac{u}{v}$, $a_{-1} = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}$ A-M

Déf : On appelle résidu de f en z_0 le réel
$\mathrm{Res}(f, z_0) = \int_{\mathcal{C}(z_0,\rho)} f(\zeta) d\zeta = a_{-1}$ série de Laurent
si $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ (f coïncide avec sa

Th des résidus : Λ ouvert connexe de $\mathbb{C}$
$S = \{a_1, \dots, a_n\}$ tq $a_i \neq a_j$ $i \neq j$ et $f \in \mathcal{G}(\Lambda \setminus S)$ et tq chaque a_j est un pôle de f. Si γ chemin fermé ds Λ tq $a_k \notin \mathrm{Im}(\gamma)$
alors $\int_\gamma f(z) dz = \left(\sum_{a_k \in S} \mathrm{Ind}(a_k, \gamma) \, \mathrm{Res}(f, a_k) \right) 2\pi i$ Tau

Appli : Calcul d'intégrales.

Références :

[A-M] Eric AMAR & Etienne MATHERON
Analyse Complexe

[Tau] Patrice TAUVEL
Analyse complexe pour la licence 3