Séries de Fourier
Exemples et applications

I Coefficients et séries de Fourier

1) Préliminaires

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ un tore de $\mathbb{R}$

→ On va énoncer la théorie dans le cadre des fonctions 2π-périodiques.

On se ramène aux fonctions T-périodiques ($T\in\mathbb{R}$) via le difféomorphisme $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \frac{T}{2\pi}x$ tel que si f est une fonction T-périodique, $g = f\circ\varphi$ est T périodique

Déf : Pour $n\in\mathbb{Z}$, on pose $e_n \left(\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto e^{int}\end{array}\right)$

Rq : c'est un polynôme trigonométrique

Notation : Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{CM}^n_{(2\pi)}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques et de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

2) Définitions

Déf : Soit $f\in\mathcal{CM}^0_{(2\pi)}$ et soit $n\in\mathbb{Z}$

On appelle n-ième coefficients de Fourier de f les complexes

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Rq : En notant $\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ pour f,g éléments de $L^2(\mathbb{T})$,

on remarque que $\langle f|e_n\rangle = c_n(f)$ et $\langle f|f\rangle = \|f\|_2^2$

Déf : On appelle pour $N\in\mathbb{N}$ la N-ième somme de Fourier de f

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$$

On appelle la série de Fourier de f la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$

Ppté : Pour tout $f\in\mathcal{CM}^0_{(2\pi)}$ et tout $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$

$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$

$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$

Rq : On se restreint donc à l'étude de $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ (même si utiliser $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ peut être pertinent lorsque f est paire ou impaire)

3) Propriétés

Ppté : Soit $f\in\mathcal{CM}^1_{(2\pi)}$, soit $n\in\mathbb{Z}$:

1/ - $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

2/ - $c_n(f') = in\,c_n(f)$

3/ - $c_n(e_k\times f) = c_{n-k}(f)$

4 - $f * e_n = c_n(f)e_n$

Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $f\in\mathcal{CM}^0_{(2\pi)}$

Alors $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$

Ppté : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthogonale pour $(\mathcal{CM}^0_{(2\pi)}, \langle\,|\,\rangle)$ ($\mathcal{CM}^0_{(2\pi)} \subseteq L^2(\mathbb{T})$)

Prop : On pose $P_N = \mathrm{Vect}(e_k)_{k\in[\![-N,N]\!]}$ pour $N\in\mathbb{N}$

P_N est un sev de $\mathcal{CM}^0_{(2\pi)}$ de base $(e_k)_{k\in[\![-N,N]\!]}$

De plus, la projection orthogonale de f sur P_n est égale à $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$

Coro : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ est une série convergente et vérifie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2$ (inégalité de Bessel)

Rq : Découle des propriétés d'espaces préhilbertiens de $(L^2(\mathbb{T}), \langle | \rangle)$

II Convergence des séries de Fourier

1) Les noyaux trigonométriques

Déf : Pour $n\in\mathbb{N}$, on appelle

- $\tilde{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ le noyau de Dirichlet d'ordre n
- $\tilde{K}_n = \frac{\tilde{D}_0 + \dots + \tilde{D}_{n-1}}{n}$ le noyau de Fejér d'ordre n

Propriétés : Pour $n\in\mathbb{N}$ et $f\in \mathcal{C}^0_{(2\pi)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

1 - $\tilde{D}_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\,dt = 1$

2 - $f * \tilde{D}_n = S_n(f)$

Déf : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle somme de Fejér d'indice n la somme $K_n = \frac{S_0(f) + \dots + S_{n-1}(f)}{n}$

Ppté : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f\in\mathcal{C}^0_{(2\pi)}$ et $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

3 - $\tilde{K}_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$

4 - $f * \tilde{K}_n = K_n$

Début DEV 1

Déf : On définit, pour $f,g\in L^1(\mathbb{T})$ le produit de convolution $f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt$

Rq : $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ pour f 2π-périodique

2) Le théorème de Fejér et ses conséquences

Th de Fejér : Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. Alors la suite de fonctions $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

Fin DEV 1

Rq : La série de Fourier de f converge uniformément en moyenne de Césaro vers f.

Prop : • $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$

• Pour $f\in\mathcal{C}^0_{(2\pi)}$, la suite (S_n) converge en norme $\|\cdot\|_2$ vers f (ie $\|S_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Prop : Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0_{(2\pi)}$, alors

- ($\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n(f) = c_n(g)$) $\Leftrightarrow$ $f = g$ ps)
- si de plus, f et g sont $\mathcal{C}^0$, ($\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n(f) = c_n(g)$) $\Leftrightarrow$ $f = g$

Prop / Égalité de Parseval : Soit $f\in\mathcal{C}^0_{(2\pi)}$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et

$$\boxed{\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2}$$

Prop : Si $f\in\mathcal{C}^1_{(2\pi)}$, alors f est limite de sa série de Fourier.

Rq : La condition de $\mathcal{C}^0_{(2\pi)}$ ne suffit pas et le théorème de Banach-Steinhaus assure l'existence d'un contre-exemple.

C-Ex : cf Gourdon ou Hauchecorne.

Appli : Le théorème de Fejér peut servir pour démontrer le théorème de Weierstrass

Coro : Soient $(f,g) \in (\mathcal{C}^0_{(2\pi)})^2$

Alors $\langle f | g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$ est absolument convergente

3) Le théorème de Dirichlet

Th de Dirichlet : Soit $f \in CM^1_{(2\pi)}$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier converge en ce point x vers $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

En particulier, si f est continue en x, la série de Fourier converge vers $f(x)$ en x.

Rq : $f(x^+) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t)$ et $f(x^-) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t)$

Th de convergence normale : Soit $f \in CM^1_{(2\pi)}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
Alors la série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

III Exemples et applications

1) Exemples de calculs

Ex 1 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodique telle que pour $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $a_n(f) = \frac{1}{2} c_n(f) = \frac{1}{2} S_n(f) = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2 \pi^2}$ et $a_0(f) = \frac{4}{3}$
Le th de cv normale permet d'écrire
$\lim\limits_{x \to \pi} S_n(f) = f(\pi)$ d'où $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$

Ex 2 : Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodique telle que pour $x \in]-\pi, \pi[$, $\varphi(x) = e^{\frac{x}{\pi}}$. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.
Alors $a_n(\varphi) = \frac{(-1)^n}{2} (e - \frac{1}{e}) \frac{1}{1 - i\pi n}$ et le th de Dirichlet s'applique.

2) Inégalité isopérimétrique

Def : Soit $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une courbe fermée de classe C^1 par morceaux. On appelle :
- longueur de γ le réel $L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$
- surface de S la mesure de la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$

Si $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ et γ orientée positivement, alors la formule de Green-Riemann assure que
$S = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) dt$

DEV 2 — Inégalité isopérimétrique

Soit γ une courbe continue, C^1 par morceaux, fermée ($\gamma(a) = \gamma(b)$), sans point double ($a \leq x_1 < x_2 \leq b$ et $\gamma(x_1) = \gamma(x_2) \Rightarrow a = x_1$ et $b = x_2$) et régulière ($\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$) de longueur L et de surface S.
Alors $L^2 \geq 4\pi S$ avec cas d'égalité si et ssi γ définit le cercle parcouru une fois

3) Séries de Fourier et équations différentielles

Ex 1 : Résoudre $y'' + y = |\sin(x)|$ où $x \in \mathbb{R}$
Idée : La série de Fourier de $x \mapsto |\sin(x)|$ se calcule et permet de déduire une solution particulière.

Ex 2 : Équation aux dérivées partielles
Historiquement, la théorie fut créée pour ce type de problème. L'équation de la chaleur est la plus emblématique : $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
pour $L \in \mathbb{R}_+$ pour $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$

Question : $(S_n(f))$ converge qd $n \to +\infty$?
Si oui, comment et quel lien avec f

Le th de Fejer intervient dans la démo de l'égalité de Parseval

Démo (J fixé) : $\longrightarrow$ C-S ?
$|c_k(f) c_k(g)| \leq \frac{1}{2}|c_k(f)|^2 + \frac{1}{2}|c_k(g)|^2$

Or, $\sum |c_k(f)|^2 / \sum |c_k(g)|^2$ cv abs

+ $S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$
$S_n(g) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$

+ c° de $\langle \cdot \rangle$

$\Longrightarrow \langle S_n(f) | S_n(g) \rangle \longrightarrow \langle f | g \rangle$

Or, (e_k) BON de L^2

donc $\langle S_n(f) | S_n(g) \rangle$
$= \langle \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k | \sum_{k=-N}^{N} c_k(g) e_k \rangle$
$= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) \overline{c_k(g)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$

(a) Résultats plus fin (cv ponctuelle), plus général et fait intervenir S_n et non $K_N = \frac{S_0 + \dots + S_{N-1}}{N}$.

Références

[Z-Q] ZUILY-QUEFFELEC Éléments d'Analyse 2° Édition

[GOU] GOURDON Analyse

[FGN 4] Oraux X-ENS Analyse 4

Dev 1 : Z-Q & GOU

Dev 2 : Z-Q & FGN 4