24.9

Suites de variables de Bernoulli indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
On considèrera des variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

I Constructions des lois discrètes classiques

1) Loi de Bernoulli

Déf : Une va X suit une loi de Bernoulli de paramètre p où $p \in [0,1]$ (notée $X \overset{\ast}{\sim} \mathcal{B}(p)$) si la loi de X est :

$P(X=0) = p$ $\quad P(X=1) = 1-p$

$P(X=k) = 0$ pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Rq : Modélise le succès ou l'échec d'une expérience aléatoire.

Rq : On peut également définir la loi de Bernoulli symétrique sur $\mathbb{Z}$ par $P(X=1) = p$, $P(X=-1) = 1-p$ et $P(X=k)=0$ pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$.
Modélise le gain ou la perte lors d'un jeu aléatoire.

Ppté : Soit $X \overset{\ast}{\sim} \mathcal{B}(p)$ de fonction génératrice G_X

- X admet une espérance et une variance : $E(X) = p$, $Var(X) = p(1-p)$
- Pour $s \in [-1,1]$, $G_X(s) = ps + 1 - p$

Ex : 1) Un lancer de pièce équilibrée à pile ou face suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
2) Obtenir ou non un multiple de 3 lors d'un lancer de dé équilibré se modélise avec $X \overset{\ast}{\sim} \mathcal{B}(\frac{1}{3})$

2) Loi binomiale

Déf : Une va X suit une loi binomiale de paramètres n et p où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si la loi de X sur $\mathbb{N}$ est (notée $\mathcal{B}(n,p)$)

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in [0,n]$
et $P(X=k) = 0$ pour $k > n$

Ppté : Soit $(X_i)_{i \in [1,n]}$ n va iid de loi $\mathcal{B}(p)$
Alors $\boxed{X_1 + \dots + X_n \overset{\ast}{\sim} \mathcal{B}(n,p)}$

Rq : Une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est la succession de n expériences de Bernoulli de paramètre p.

Ppté : Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ de fonction génératrice G_X.

- X admet une espérance et une variance : $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$
- Pour $s \in [-1,1]$, $G_X(s) = (ps + 1 - p)^n$
- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$

Ex : 1) On pioche 5 boules dans un sac avec 10 boules noires et 50 boules blanches avec remise à chaque tirage.
Le nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres 5 et $1/6$.

3) Loi géométrique

Déf : Une va X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ (notée $\mathcal{G}(p)$) si la loi de X sur $\mathbb{N}^*$ est :

$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

Rq : Réaliser une expérience de Bernoulli jusqu'à obtenir un succès se modélise par une loi géométrique.

Ppté : Soit $X \overset{\ast}{\sim} \mathcal{G}(p)$ de fonction génératrice G_X

- X admet une espérance et une variance : $E(X) = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1}{p^2}$?
- Pour $s \in [-1,1]$, $G_X(s) = \frac{sp}{1-(1-p)s}$

Ex : 1) On lance successivement un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. Le nombre de lancers effectués suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$

4) Loi de Poisson

Déf : Une va X suit une loi de Poisson de paramètre λ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (notée $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si la loi de X est :
$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$

Rq : Le lien avec les variables de Bernoulli sera vu en : c'est la loi des événements rares

Prop : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ de fonction génératrice G_X

- X admet une espérance et une variance : $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$
- Si $s \in \mathbb{R}$, alors $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$
- Si $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

II Applications

1) Résultats issus de limites de lois classiques

Th de Poisson : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda > 0$

Alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X_\infty \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Rq : L'indépendance n'est pas nécessaire

Rq : La loi de Poisson est construite comme limite de va de lois binomiales particulières.

Th des événements rares : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ une famille finie $\{A_{n,j} \mid 1 \le j \le M_n\}$ d'événements indépendants sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
Soit $P(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{M} 1\!\!1_{A_{n,k}}$

On suppose que $(M_n)_n$ est croissante et $\lim M_n = +\infty$

- $\max_{1\le k\le M} p_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\sum_{k=1}^{M} p_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ où $\lambda > 0$

Alors S_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ

Rq : Cas plus général du théorème précédent.

Th de Bernoulli : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite iid de loi $\mathcal{B}(p)$

Alors $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{P} Z = E(X_1) = p$

Th de Weierstrass : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
et soient $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$
le n-ième polynôme de Bernstein de f.
Alors $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f
donc f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Rq : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid de loi $\mathcal{B}(x)$ où $x \in [0,1]$, $S_n = X_1+\dots+X_n$
alors $E(f(\frac{S_n}{n})) = B_n(x)$ par lemme de transfert.

Théorème Central Limite : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$ iid
et soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Alors $\frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{n}\sqrt{Var(X)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Rq : Si (X_n) iid de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$
Permet d'approcher une loi binomiale par une loi normale centrée réduite pour des grandes valeurs de np et $n(1-p)$.

Appli : Avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid de loi : $\mathcal{P}(1)$, on peut retrouver la formule de Stirling : $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

2) Marches aléatoires

) C'est la loi faible des grands nombres appliquée à $(X_n) \sim B(p)$ iid

Références

[Ouv] J.Y OUVRARD *Probabilités* (1 & 2)

[Cot] M. COTTREL and al
Exercices de probabilités

[Z-Q] ZUILY - QUEFFELEC *Eléments d'Analyse*

[Maz] L. MAZLIAK *Probabilités* (Niveau M1)

[G-K] O. GARET, A. KURTZMANN
De l'intégration aux probabilités