Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé
Toutes les variables aléatoires (va) sont définies sur cette espace à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

I Généralités

1) Définition et premières propriétés

Déf : Soit X une va et supposons que $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$
L'espérance de X noté $\mathbb{E}(X)$ est le réel $\int_\Omega X \, d\mathbb{P}$

Rq : Si X est une va discrète sur $\mathbb{N}$ admettant une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \, \mathbb{P}(X=k)$
si X est une var à densité f_X admettant une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \, d\lambda(x)$

Lemme de transfert : Soit f une fonction mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et soit X va.
La va $h(X) \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ ssi $h \in L^1(\Omega, \mathbb{P}_X)$ et dans ce cas

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mathbb{P}_X(x)$$

Rq : Si X est une va discrète sur $\mathbb{N}$, l'égalité s'écrit
$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \, \mathbb{P}(X=k)$
Si X est une var à densité f_X, l'égalité s'écrit
$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) f_X(x) \, d\lambda(x)$

Ppté : Soient X, Y deux va admettant une espérance et $a \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(aX+Y) = a\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ lorsque $X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X))$ pour $A \in \mathcal{A}$

Déf : Soit X une var et supposons que $X^k \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, $k \in \mathbb{N}^*$
Le moment d'ordre k de X est l'espérance de la va X^k

Déf : Soit X une var et supposons que $X^2 \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$
La variance de X est l'espérance de la va $X - \mathbb{E}(X)$
et on la note $\mathrm{Var}(X)$

Ppté : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Déf : Soient X, Y var telles que X et Y soient éléments de L^2
Alors $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$ est bien définie
et on l'appelle la covariance de X et de Y notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$

Ppté : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

Ppté : Soient X, Y admettant une variance.
- $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ ie $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

2) Inégalités liés aux moments

Rq : $\mathbb{E}(|X|^k) = \|X\|_k^k$ où $\|\cdot\|_k$ désigne la norme de L^k
Les inégalités des espaces L^p (inég de Hölder, de Minkowski et de Jensen) se traduisent en termes de moments d'ordre p.

Cor : Si X admet un moment d'ordre p, $p \geq 1$, alors X admet un moment d'ordre q pour $q \geq 1$ et $p \geq q$.
Rq : Conséquence de l'inégalité de Hölder.

Inégalité de Markov : Soit X var telle que $X \in L^p(\Omega, \mathbb{P})$
Pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|^p)}{\alpha^p}$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X var telle que $X \in L^2(\Omega$
Pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \dfrac{1}{\alpha^2} \mathrm{Var}(X)$

Rq : C'est l'inégalité de Markov pour la va $X - \mathbb{E}(X)$ et $p=2$.

Cov
Ouv
(1)

3) Exemples

1) Soit la va X discrète sur $\mathbb{N}^*$ définie par
$\mathbb{P}(X=n) = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{n}$
X n'admet pas d'espérance car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$.

2) Soit X suivant une loi de Cauchy i.e. à densité f_X égale à $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$
X n'admet pas d'espérance car $\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^2} = +\infty$.

Rq : De manière analogue, on peut construire des va qui n'admettent des moments que jusqu'à un certain r.

3) En annexe, le tableau donne l'espérance et la variance des principales lois discrètes et à densités.

II Applications

1) La fonction génératrice des moments

Def : Soit X une var
La fonction génératrice des moments est la fonction M_X définie par $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mathbb{P}_X(x)$ lorsque $M_X(t) < +\infty$.
On note U l'ensemble de définition de M_X avec $0 \in U$.

Ppté : • Deux var ayant même fonction génératrice des moments sur un voisinage de 0 ont même loi :

• Si $M_X(t) < +\infty$ sur un voisinage de 0, alors M_X est $\mathcal{C}^\infty$ avec $M_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})$.
En particulier, X admet des moments de tous ordres et $E(X^k) = M^{(k)}(0)$

De plus, $M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k)$

Rq : Dans ce cas, la loi de X est entièrement déterminée par la suite de ces moments.

Ppté : Soit (X_n) suite de var et X var. On suppose que X_n admet une fct génératrice des moments sur un voisinage I de 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$;
Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $M_{X_n} \xrightarrow{S} M_X$ sur I

Prop : Soit X une va discrète sur $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X et de fct génératrice des moments M_X
Alors $M_X(t) = G_X(e^t)$ pour $t \in U$.

Rq : Les propriétés se propagent d'une autre manière entre M et G.

Ppté : Soit X une va de fonction génératrice G_X
X admet un moment d'ordre n si et ssi G_X est n fois dérivable à gauche en 1.

Prop : Soit X une var de fonction caractéristique Φ_X et de fct génératrice des moments M_X
Alors $M_X(t) = \Phi_X(it)$ pour $t \in U$

Ppté : Si X admet un moment d'ordre n, alors Φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi_X^{(n)}(0) = i^n E(X^n)$

2) Les grands théorèmes

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite iid de var tel que $E(|X_1|^2) < +\infty$
Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} Z = E(X_1)$

Rq : Découle de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Appli : Th de Weierstrass : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$.
On définit le n-ième polynôme de Bernstein B_n sur $[0,1]$ par $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$.

Alors B_n converge uniformément vers f

<u>Rq</u> : Si (X_n) iid de loi $B(x)$ où $x \in [0,1]$ fixé, si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ alors $E(f(\frac{S_n}{n})) = B_n(x)$ par lemme de transfert.

<u>Théorème central limite</u> : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite iid de L^2 de var d'espérance m et de variance σ^2.

Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z$

$\boxed{\text{DEV 1}}$ — Formule de Stirling

Le théorème central limite appliqué à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $X_1 \sim \mathcal{P}(1)$ permet de montrer que $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

3) Espérance conditionnelle

Par th de Cauchy-Schwarz.

Rq AH : cas Cottrel

Transformée de Laplace $M_X(u) = E(e^{uX})$

↳ NON

c.à.d la fonction génératrice des moments

Transformée de Laplace $L_X(u) = E(e^{-uX})$

Références

OUVRARD

COTTREL

MAZLIAK

GARET - KURTZMANN