Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne.
Toutes les variables aléatoires (abrégé va) sont définies de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

I Généralités

1) La fonction caractéristique

Def : Soit X une va sur $\mathbb{R}^d$.
La fonction caractéristique de X notée Φ_X est la fonction $\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t|X\rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t|x\rangle} d\mathbb{P}_X(x)\end{array}\right)$

Rq : C'est la transformée de Fourier de X !

Ppté : Soit X une va sur $\mathbb{R}^d$, $(a,b) \in (\mathbb{R}^d)^2$ et Y va sur $\mathbb{R}^d$

- X et Y ont même loi si et ssi $\Phi_X = \Phi_Y$
- $\Phi_X(0) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $|\Phi_X(t)| \leq 1$
- Φ_X est uniformément continue
- $\Phi_{aX+b}(t) = \Phi_X(at) e^{i\langle b|t\rangle}$
- $\Phi_{-X}(t) = \overline{\Phi_X(t)}$ et en particulier, X est symétrique si et ssi Φ_X est à valeurs réelles.

Rq : Si X va à densité f_X alors $\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t|x\rangle} f_X(x)dx$

Ppté : Si X admet un moment d'ordre n, alors X est $\mathcal{C}^n$ et $\Phi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n)$

Ppté : Soient X, Y deux va indépendantes.
Alors $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$

Th de Lévy : Soient (X_n) suite de va et X va

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et ssi $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_{X_n}(t) \longrightarrow \Phi_X(t)$
- Si (Φ_{X_n}) converge simplement vers une fonction g continue en 0, alors g est fonction caractéristique d'une va Z tel que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$

2) La fonction génératrice

Cette fonction ne concerne que les va discrètes qu'on suppose dans $\mathbb{N}$ ou

Def : Soit X une va discrète sur $\mathbb{N}$.
La fonction génératrice G_X de X est la fonction $\left(\begin{array}{l}D_X \longrightarrow \mathbb{R} \\ s \longmapsto \mathbb{E}(s^X)\end{array}\right)$ où D_X est l'ensemble où $\mathbb{E}(s^X) < +\infty$

Ppté : $[-1,1] \subset D_X$ car $|s^X| \leq 1$

Ppté : Soit X une va discrète sur $\mathbb{N}$ et Y va sur $\mathbb{N}$.

- Pour $s \in [-1,1]$, $G_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)s^k$
- G_X est $\mathcal{C}^0$ sur $[-1,1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ (comme série entière)
- G_X caractérise la loi de X :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$ et $G_X = G_Y \Leftrightarrow X \overset{\mathcal{L}}{\sim} Y$

Ppté : Soit X une va sur $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.
Alors X admet un moment d'ordre n si et ssi G_X est n fois dérivable à gauche en 1.
En particulier, si G_X est dérivable à gauche de 1
$\mathbb{E}(X) = G_X'(1^-)$

Ppté : Soient X, Y deux va sur $\mathbb{N}$ indépendantes
Alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ pour tout $s \in [-1,1]$

3) La transformée de Laplace

Déf : Soit X une va sur $\mathbb{R}^d$.
La transformée de Laplace de X notée L_X est la fonction $\left(\begin{array}{l} U \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathbb{E}(e^{-\langle t|X\rangle}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\langle t|x\rangle} dP_X(x) \end{array}\right)$
où $U = \{t \in \mathbb{R}^d / L_X(t) < +\infty\}$

Ppté : $0 \in U$ et si X est une var ≥ 0 ps, $\mathbb{R}_+ \subseteq U$

Ppté : Soit X une va sur $\mathbb{R}^d$ et Y va sur $\mathbb{R}^d$ et (X_n) suite de va
- $L_X = L_Y$ sur un voisinage de 0 ssi $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} Y$
- Si $\forall i \in \mathbb{N}$, X_i admet une transformée de Laplace sur un voisinage V de 0, alors on a l'équivalence $\forall t \in V$, $L_{X_n}(t) \to L_X(t)$ ssi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
- Si sur un voisinage de 0, $L_X(t) < +\infty$ $\forall t \in V$, alors L_X est de classe C^∞ sur V et X admet des moments de tout ordre avec $\mathbb{E}(X^k) = (-1)^k L_X^{(k)}(0)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Ppté : Soient X, Y deux va indépendantes.
Alors $L_{X+Y} = L_X L_Y$ ~~là~~ où ceci a un sens.

4) Exemples

1) La loi de Cauchy admet une transformée de Laplace uniquement en 0
2) La fonction génératrice de X suivant la loi sur $\mathbb{N}^*$ $P(X=k) = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$ n'est pas dérivable à gauche de 1
3) Les fonctions caractéristiques, génératrices et transformées de Laplace des lois usuelles sont données en annexe (lorsqu'elles existent).

II Exemples et applications

1) Un processus de branchement

Pb : On étudie la transmission du nom X porté à l'origine par un seul homme qui forme la génération 0. La probabilité p_k qu'un homme ait k fils est constante au cours des générations et on suppose $p_0 \in]0,1[$.
Les descendants directs mâles de la génération n forment la génération $n+1$.
Soit Z_n le nombre d'hommes à la génération n.
Soit G la fonction génératrice de Z_1 : $G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$ $s \in [-1,1]$
Soit $x_n = P(Z_n = 0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

DEV1
1) $G_{Z_n} = \overbrace{G \circ \dots \circ G}^{n \text{ fois}}$
2) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par $x_{n+1} = G(x_n)$ et $x_1 = p_0$
3) Si $\mathbb{E}(Z_1) \leq 1$, alors $x_n \to 1$ (extinction du nom X)
et si $\mathbb{E}(Z_1) > 1$, alors $x_n \to l$ où l est la solution < 1 de l'équation $x = G(x)$

2) Résultats issus de limites de lois classiques

Théorème central limite : Soit (X_n) une suite iid de L^2 de var d'espérance m et de variance σ^2
Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} Z$

Rq : Utilise le th de Lévy.
Appli : Avec (X_n) iid de loi de Poisson de paramètre 1, on peut retrouver la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

...

Rq : La loi de $X+Y$ est donnée par la convolution $(X \perp Y)$
de P_X et P_Y → pas pratique
alors que $\phi_{X+Y}(x) = \phi_X(x)\,\phi_Y(x)$
Le cool !

2) Th des evenements :

3) Vecteurs gaussiens

Références

OUVRARD (1&2)
COTTREL
MAZLIAK
G-K