262

Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé
Soit $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne et d'une norme $\|\cdot\|$.
On considère les variables aléatoires (abrégé va) de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

I Généralités

1) Définitions

Déf : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va et X une va.

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X ($X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{ps} X$) s'il existe un ensemble $E \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(E)=1$ et pour tout $\omega \in E$, $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)$
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X ($X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$) si pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers X où $p\geq 1$ ($X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$) si $X \in L^p(\Omega)$ et si $\mathbb{E}(\|X_n - X\|^p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X ($X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue bornée $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$

Rq : Les trois premières convergences sont dites spatiales car l'espace de probabilité Ω intervient contrairement à la convergence en loi qui fait intervenir uniquement les lois de X_n et de X (c'est une convergence de mesure en fait)

2) Lien entre les différentes convergences

Prop : Les convergences dans L^p et presque sûre impliquent la convergence en probabilité.

Prop : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors il existe une sous-suite de (X_n) qui converge presque sûrement vers X.

Rq : Grâce au lemme de Borel-Cantelli

Prop : Pour $p\geq 1$, si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors il existe une ~~sous~~-suite de (X_n) qui converge presque sûrement vers X

Rq : Énoncé classique des espaces L^p.

Prop : Soient $q\geq p\geq 1$. Si $X_n \xrightarrow{L^q} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$

Rq : Puisque $\mathbb{P}(\Omega)=1$, $L^q \subseteq L^p$)?

Prop : La converge en probabilité implique la convergence en loi

Prop : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $X \equiv a$, $a \in \mathbb{R}^n$, alors X_n converge en probabilité vers X.

~~Les contres-exemples~~ de HAUCHECORNE

3) Propriété de la convergence en loi

Déf : Soit X une va de $\mathbb{R}^d$ tq $X=(X_1, \dots, X_d)$ où X_i var pour $i\in\{1,\dots,d\}$

La fonction de répartition de X notée F_X est la fonction $\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^d & \to & [0,1] \\ (x_1,\dots,x_d) & \mapsto & \mathbb{P}(X_1\leq x_1, \dots, X_d\leq x_d)\end{array}\right)$

La fonction caractéristique de X notée Φ_X est la fonction $\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathbb{E}(e^{i\langle x | X\rangle})\end{array}\right)$

Th de Lévy : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va de $\mathbb{R}^d$ et X va de $\mathbb{R}^d$

1. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi_X(x)$

- Si (Φ_{X_n}) converge ~~simplement vers une fonction g continue en 0 alors g est fonction caractéristique~~

• Si (Φ_{X_n}) converge simplement vers une fonction g continue en 0, alors g est la fonction caractéristique d'une va Z telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$

Prop : Soient (X_n) suite de va sur $\mathbb{R}^d$ et X va sur $\mathbb{R}^d$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi en tout point x de continuité de F_X,
$$F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$$

Ex : $\mathcal{G}(p)$

Rq : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ n'implique pas $X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$!
Prendre $X \sim \mathcal{U}_{[-1,1]}$ et $X_n = -X$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lemme de Slutsky : Soient $(X_n), (Y_n), X, Y$ va sur $\mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$

- Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \equiv 0$, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
- Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \equiv a$, alors $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX$

Rq : La cv en loi est facile à caractériser mais pas très pratique à manipuler.

II Exemples et applications

1) Loi faible et forte des grands nombres

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite iid de va admettant une variance.
Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} Z \equiv \mathbb{E}(X_1)$

Rq : Découle de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Appli : Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite iid tq $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$
Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} Z = p$

Conséquence : th de Weierstrass : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et on définit le $n$ième polynôme de Bernstein B_n par $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $x \in [0,1]$
Alors B_n converge uniformément vers f.

Rq : Si (X_n) iid de loi $\mathcal{B}(x)$ et si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ (avec $x \in [0,1]$)
$\mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n})) = B_n(x)$ par lemme de transfert.

Loi forte des grands nombres : Soit (X_n) une suite iid de var admettant une espérance.
Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{ps} Z \equiv \mathbb{E}(X_1)$

Rq : Forte car hypothèse plus faible et conséquence plus forte. L'hypothèse deux à deux $\perp\!\!\!\perp$ suffit

Appli ?

2) Le théorème central limit

Th : Soit (X_n) une suite de var iid d'espérance m et de variance σ^2 finies ($X_1 \in L^2(\mathbb{L})$)
Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
Alors $$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z$$

Rq : En appliquant le théorème pour $X_n = \mathcal{B}(p)$, $p \in [0,1]$ on peut approcher des lois binomiales de paramètres (n,p) par des lois normales centrées réduites pour des grandes valeurs de np et $n(1-p)$.

DEV 1 Formule de Stirling

Le théorème central limite appliqué à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $X_n \sim \mathcal{P}(1)$ permet de montrer que $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Rq : La démo utilise le critère de Lévy.

3) Espérance conditionnelle

Références :

OUVRARD (1 & 2)
COTTREL
MAZLIAK - Probabilités
G-K

Plus d'exemples ?

Ex : Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$
On pose $X_n \sim \mathcal{U}_{A_n}$ et $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$
Le calcul par les fonctions de répartitions permet de montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ (discret → à densité !)