263

Variables aléatoires à densité
Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

I Généralités

1) Définitions et propriétés

Déf : Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.
Une application X de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{E})$ mesurable est appelée variable aléatoire.
La loi de X est la probabilité $\mathbb{P}_X$ ($\mathcal{E} \to$, $A \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(A))$)
Lorsque $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on parle de variable aléatoire réelle (abrégé var).

Déf : Soit X une va sur $\mathbb{R}^d$ où $X = (X_1, \dots, X_d)$, X_i var.
La fonction de répartition de X notée F_X est la fonction ($\mathbb{R}^d \to [0,1]$, $(x_1, \dots, x_d) \mapsto \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$)

Ppté : Si $F_X = F_Y$, alors X et Y ont même loi.

Déf : Une va sur $\mathbb{R}^d$ admet une densité f_X si
- f_X est borélienne et positive
- $\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d)\, d\lambda_d(x_1, \dots, x_d) = 1$

Propo : Soit X une var de fonction de répartition F_X.
F_X est continue sur $\mathbb{R}$ si et ssi X admet une densité f_X vérifiant $f_X = F_X'$.

Ppté : Si X admet une densité et X var, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$

Ppté : • Soient X, Y deux var $\perp\!\!\!\perp$ admettant comme densité f_X et f_Y.
Alors le couple (X,Y) admet une densité égale à $(x,y) \mapsto f(x) f(y)$.
• Soit (X,Y) un couple de var de densité φ.
Alors X et Y admettent des densités et $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\, dy$

Déf : Soit X une var de densité f_X.
Si $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\, d\lambda(x) < +\infty$, alors X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ égale à $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, d\lambda(x)$

Ppté : $\mathbb{E}$ est linéaire sur $L^1(\mathbb{R})$ et si $X \perp\!\!\!\perp Y$ dans L^1,
$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Déf : Soit X une var de densité f_X.
Si X^2 admet une espérance, alors X admet une variance $\mathrm{Var}(X)$ égale à $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Ppté : $\mathrm{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)\, d\lambda(x)$

Ppté : $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ si $X \perp\!\!\!\perp Y$

Déf : Une var X admet un moment d'ordre r si la var X^r admet une espérance.

2) Outils d'étude des variables aléatoires à densité

Déf : Soit X une va sur $\mathbb{R}^d$ de densité f_X.
La fonction caractéristique Φ_X de la va X est la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t | X \rangle})$ $\left(= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t | x \rangle} f_X(x)\, dx\right)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

Rq : C'est la transformée de Fourier de X ! Bon def car $|e^{i\langle t | x\rangle}| \leq 1$

Propo : Soit X une var de densité f_X.
- $\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\, dx \quad \forall t \in \mathbb{R}$ • $\Phi_X(0) = 1$
- Φ_X est uniformément continue et $|\Phi_X(t)| \leq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$
- Φ_X caractérise la loi de X :
$\Phi_X = \Phi_Y$ si et ssi $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$

Ppté : Si X admet un moment d'ordre r, alors Φ_X est $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\Phi_X^{(m)}(0) = i^m \mathbb{E}(X^m)$ pour $m \in [\![1, r]\!]$

Ppté : Si X et Y sont deux var indépendantes, alors $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Soient (X_n) suite de var et X var

Thm de Lévy : 1) $\Phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_X$ si et ssi $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$

2) Si (Φ_{X_n}) converge simplement vers une fonction continue en 0, alors Φ est la fonction caractéristique d'une va Z tel que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

II Lois classiques

1) Loi uniforme sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$

Déf : Soient a, b deux réels avec $a<b$ et X var. X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ (notée $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$) si la densité de X est $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Ppté : Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors X admet une espérance et une variance :
$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

2) Loi exponentielle

Déf : Une var X suit une loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$ (notée $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$) si X admet pour densité
$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Ppté (Sans mémoire) : Soit X une var telle que $\forall (s,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$
$\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > t)\, \mathbb{P}(X > s)$
et telle que $\mathbb{P}(T > 0) \neq 0$.
Alors X suit une loi exponentielle

Rq : La loi exponentielle permet de modéliser des files d'attentes qui sont des processus sans mémoires.

Ppté : Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ de fonction caractéristique Φ_X et de fonction de répartition F_X.

1) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$
La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[} = 1 - F_X$ est appelé fonction de survie.

2) • X admet une espérance et une variance :
$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$

3) • $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda + it}$

4) • Soient $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$.
Alors $\min(X,Y) \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$ et $\mathbb{P}(\min(X,Y) = \lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$
(lemme des réveils)

3) Lois normales

Déf : Une var X suit une loi normale (ou loi de Gauss) de paramètre m et σ^2 où $\sigma^2 > 0$ (notée $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$) si X admet pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Déf : Lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on parle de loi normale centrée réduite : la densité est $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Ppté : Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de fonction caractéristique Φ_X
• X admet une espérance et une variance :
$\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
• $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = e^{itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Ppté (Stabilité des lois normales) : Soient $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(M, \rho^2)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$.
Alors $X + Y \sim \mathcal{N}(m+M, \sigma^2 + \rho^2)$

Rq : Les lois normales interviennent pour approcher d'autres variables aléatoires en raison du TCL.

III Exemples et applications

1) Le théorème central limite

Th : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de var iid d'espérance m et de variance σ^2 finies ($X_n \in L^2$ $\forall n$).
Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et soit $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z$

Rq : En appliquant le th pour $X_n = \mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$, on peut approcher des lois binomiales de paramètres (n,p) par une loi normale centrée réduite pour des grandes valeurs de np et $n(1-p)$.

DEV 1 — Formule de Stirling

Le théorème central limite appliqué à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $X_n \sim \mathcal{P}(1)$ permet de montrer que $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

2) Vecteurs gaussiens

Pg AH : Pas unicité de la densité !

P1 H : $u_{q,t_k,N} \xrightarrow[k\to\infty]{} u_{[0,1]} \longrightarrow f$

Limite de va discrète = va à densité HAUCHECORNE

Lien discret / densité → TCL

Références

OUVRARD

COTTREL

MAZLIAK

G-K