Variables aléatoires discrètes
Exemples et Applications

~~Soit Ω un ensemble dénombrable~~
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

I Généralités

1) Définitions

Def : Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.
Une application X de Ω dans E est une variable aléatoire discrète (abrégé vad) si :
- l'ensemble $X(\Omega)$ est dénombrable
- X est une application mesurable ie $\forall x \in E$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$

Rq : En général, $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Def : Soit X une vad.
La loi de probabilité de X est la donnée d'une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X=k) \geq 0$
- $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$

Def : Soit X une vad sur $E = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
La vad X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| \mathbb{P}(X=x_k)$ converge.
Dans ce cas, $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X=x_k)$ est appelé espérance de X.

Ex : Soit la vad X définie par $\mathbb{P}(X=k) = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$ sur $\mathbb{N}^*$ qui est bien définie.
X n'admet pas d'espérance car $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k} = +\infty$

Ppté : Soient X, Y deux vad sur E qui admettent une espérance et soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$
et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ si X et Y sont indépendants.

Def : Soit X une vad sur E admettant une espérance.
On appelle variance de X le réel $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))^2$ s'il existe. On la note $Var(X)$.
Avec la formule de transfert, on peut écrire
$$Var(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (x_k - \mathbb{E}(X))^2\, \mathbb{P}(X=k)$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Ppté : Soient X, Y deux vad sur E admettant une variance et soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$
et $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ si X et Y sont indépendants

Def : Une vad X sur E admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ si la vad X^r sur E admet une espérance.

2) Outils d'étude des variables aléatoires discrètes

Def : Soit X une vad sur $\mathbb{N}$
La fonction génératrice G_X de la vad X est la fonction définie sur $[-1,1]$ par $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$ pour $s \in [-1,1]$

Rq : C'est bien défini sur $[-1,1]$ au moins.

Prop : Soit X une vad sur $\mathbb{N}$ de loi $\mathbb{P}(X=k) = p_k$. Alors
- $G_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$ pour tout $s \in [-1,1]$
- G_X est $\mathcal{C}^0$ sur $[-1,1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$
- G_X caractérise la loi de X : $\forall k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Rq : Résultats des ppties des séries entières

Ppté : Soit X une vad sur $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.
Alors pour que X admette un moment d'ordre r, il faut et il suffit que G_X soit r fois dérivable à gauche en 1.

En particulier, si G_X est dérivable à gauche en 1,
$E(X) = \lim_{s \to 1} \left(\frac{G_X(s) - G_X(1)}{s-1} \right)$

Ppté : Soient X et Y deux vad indépendantes de fonctions génératrices G_X et G_Y respectivement.
Alors $\forall s \in]-1,1[$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s)$

Déf : Soit X une ~~vad sur $\mathbb{N}$~~ var
La fonction de répartition de X notée F_X est la fonction définie de $\mathbb{R}$ sur $[0,1]$ par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
Ppté : F_X est une fonction en escalier si X est une vad sur $\mathbb{N}$.

II Lois classiques

1) Loi uniforme sur un ensemble fini

Soit E un ensemble fini.
On définit la loi uniforme sur E comme la probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(E)}$

2) Loi de Bernoulli

Déf : X suit une loi de Bernoulli de paramètre p notée $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$ si la loi de X sur $\mathbb{N}$ définie par :
$\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=k) = 0$ si $k > 1$
Rq : Succès ou échec d'une expérience aléatoire.

Ppté : • Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors X admet une espérance et une variance : $E(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$
• Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors la fonction génératrice de X, G_X,
est $G_X(s) = ps + 1 - p$ définie sur $[-1,1]$

3) Loi binomiale

Déf : La loi binomiale de paramètres n et p où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ notée $\mathcal{B}(n,p)$ est la va X définie par (sur $\mathbb{N}$) : cot
$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in [0,n]$
et $\mathbb{P}(X=k) = 0$ si $k \geq n+1$.
Rq : C'est la succession de n expériences de Bernoulli de paramètre p indépendantes.

Ppté : • Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors X admet une espérance et une variance : $E(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$ ouv
• Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors la fonction génératrice G_X de X est $G_X(s) = (ps + (1-p))^n$ définie sur $[-1,1]$.
• Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, $X \perp Y$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$

4) Loi géométrique

Déf : La loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ notée $\mathcal{G}(p)$ est la loi définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
Rq : C'est la succession d'expériences de Bernoulli de paramètre p jusqu'à obtenir un succès.

Ppté : • Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance : $E(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{Var}(X) = \left(\frac{1}{p^2}\right)$?
• Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors la fonction génératrice G_X de X
est $G_X(s) = \frac{sp}{1-(1-p)s}$ définie sur $]-1,1[$

5) Loi de Poisson

Déf : La loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ est la loi définie sur $\mathbb{N}$ par
$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
Rq : C'est la loi des événements rares

Ppté : • Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance : $E(X) = \lambda$ et $Var(X) = \lambda$

• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors la fonction génératrice de X G_X est $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ définie sur $\mathbb{R}$.

• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ et X et Y sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

III Exemples et Applications

1) Un processus de branchement

Pb : On étudie la transmission du nom X porté à l'origine par un seul homme qui forme la génération 0.
La probabilité qu'un homme ait k fils est égale à p_k et est constante au cours des générations.
Les descendants mâles directs de la $n$ième génération forment la $(n+1)$-ième génération.
On suppose $p_0 \in]0,1[$ et soit Z_n le nombre d'hommes à la $n$ième génération,
Soit G la fonction génératrice de Z_1 : $G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$ $s \in [0,1]$
et soit $x_n = P(Z_n = 0)$.

Prop : 1) $G_{Z_n} = \overbrace{G \circ \dots \circ G}^{n \text{ fois}}$

2) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par $x_{n+1} = G(x_n)$ et $x_1 = p_0$

3) Si $\sum_{k=0}^{+\infty} k p_k \leq 1$ alors $x_n \longrightarrow 1$

et si $\sum_{k=0}^{+\infty} k p_k > 1$ alors $x_n \longrightarrow \ell$ où ℓ est la solution < 1 de $x = G(x)$.

DEV 1

2) Th de Weierstrass par les probas

Pour la fin :

2) Ths limites

Stirling pour les probas, évènements rares, Weierstrass (ou B(n,p))

3) ~~Processus de Poisson~~

4) ~~Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}^n$)~~ ?

Rq AH : Rap des lois

→ mal dit

Références

COTTREL

OUVRARD

MAZLIAK

G-K